

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



**Аксёнов Иван Сергеевич**

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ  
ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПВХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ  
ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

2.1.1 – Строительные конструкции, здания и сооружения

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
к.т.н., доцент Константинов А.П.

Москва 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА РАСЧЕТА НДС ОКОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПВХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....	11
1.1 Проблемы проектирования оконных конструкций на основе ПВХ профилей.....	11
1.2 Анализ исследований напряженно-деформированного состояния оконных ПВХ конструкций при климатических температурных воздействиях.....	13
1.3 Обзор исследований, устанавливающих влияние температурных деформаций на эксплуатационные характеристики оконных ПВХ конструкций.....	15
1.3 Выводы к 1 главе.....	17
ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОКОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПВХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....	19
2.1 Исследование характера температурного поля в профильных элементах оконных конструкций ПВХ .....	19
2.2 Методика расчета напряженно-деформированного состояния оконного профиля ПВХ при действии ступенчатого температурного поля.....	23
2.3 Расчет свободного температурного изгиба ПВХ профиля.....	33
2.4 Напряженно-деформированное состояние оконного профиля ПВХ и стального сердечника при климатических температурных воздействиях .....	37
2.4.1 Расчет значений продольных сил реакции, возникающих в местах крепления ПВХ профиля и сердечника.....	40
2.4.2 Описание изгиба ПВХ профиля при климатических температурных воздействиях	42
2.4.3 Описание изгиба армирующего сердечника при климатических температурных воздействиях .....	46
2.4.4 Сбор общей матрицы системы уравнений .....	47
2.5 Решение тестовой задачи .....	48
2.6 Анализ влияния физической нелинейности ПВХ на напряженно-деформированное состояние оконных профилей ПВХ с армирующим стальным сердечником.....	52
2.7 Метод расчета температурных деформаций оконной конструкции как многокомпонентного целого.....	56
2.7.1 Решение системы уравнений, описывающей совместный изгиб нескольких профилей, соединенных упругим уплотнителем .....	61
2.7.2 Определение констант интегрирования.....	66

2.7.3 Учёт сосредоточенных сил и моментов.....	70
2.7.4 Частные случаи .....	72
$\det(\Omega)=0$ .....	72
Два стержня, один из которых является абсолютно жестким .....	74
2.7.5 Изгиб армирующего сердечника .....	77
2.7.6 Использование разработанного математического аппарата на примере решения задачи об изгибе комбинации профилей в импостном притворе двухстворчатого окна .....	78
2.8 Критерий ограничения деформаций оконных конструкций.....	83
2.9 Выводы к 2 главе.....	84
ГЛАВА 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОКОННЫХ ПВХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....	87
3.1 Методика проведения экспериментальных исследований .....	87
3.2 Анализ результатов экспериментальных исследований .....	92
3.3 Выводы к 3 главе.....	106
4 ГЛАВА. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ОКОННЫХ ПВХ КОНСТРУКЦИЙ.....	108
Выводы к 4 главе .....	112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	114
РЕКОМЕНДАЦИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ .....	116
ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ .....	117
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	119
ПРИЛОЖЕНИЕ А.1. ЧЕРТЕЖИ ОКОННЫХ БЛОКОВ, ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ .....	127
ПРИЛОЖЕНИЕ А.2. СХЕМЫ МОНТАЖА ОКОННЫХ БЛОКОВ .....	136
ПРИЛОЖЕНИЕ А.3. СХЕМЫ РАССТАНОВКИ ДАТЧИКОВ.....	140
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ ВНЕДРЕНИЯ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ...	150

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы** обусловлена накопленным опытом использования светопрозрачных ограждающих конструкций (далее – оконных конструкций) из ПВХ профилей в климатических условиях центральной и северной частей РФ, который свидетельствует о существенном снижении их эксплуатационных характеристик в зимний период времени (повышение воздухопроницаемости, снижение показателей звукоизоляции, приведенного сопротивления теплопередаче). Данное обстоятельство обусловлено зависимостью напряженно-деформированного состояния оконных конструкций от климатических температурных воздействий, которая для ПВХ окон проявляется в наибольшей степени среди всех типов оконных конструкций вследствие высокого значения коэффициента линейного температурного расширения поливинилхлорида. Подтверждено, что температурные деформации оконных ПВХ конструкций сопоставимы по величине с деформациями от действия ветровых нагрузок, однако в настоящее время ни в отечественной, ни в зарубежной инженерной практике при проектировании оконных ПВХ конструкций вопрос влияния температурных воздействий на их напряженно-деформированное состояние не рассматривается и статические расчеты окон на климатические температурные воздействия не выполняются. Объясняется это, в первую очередь, отсутствием методик подобных расчетов. Таким образом, существует необходимость в разработке методов расчета напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей при климатических температурных воздействиях. При этом наиболее актуальным для климатических условий РФ является учет зимних условий эксплуатации.

**Степень разработанности темы исследования.** К настоящему моменту в мире выполнен ограниченный объем научных исследований, посвященных изучению напряженно-деформированного состояния оконных конструкций при климатических температурных воздействиях. Это обусловлено тем, что используемый на территории РФ тип оконных конструкций из ПВХ профилей помимо России применяется только в странах Центральной и Восточной Европы, где в зимний период эксплуатации не возникает проблем с температурными деформациями оконных конструкций, а в регионах с близкими к РФ зимними климатическими условиями (страны Северной Европы, Северной Америки, Китай) используются ПВХ окна, конструкция которых значительно отличаются от применяемых в РФ. Большинство проведенных исследований по рассматриваемой теме (Elmahdy A.H., Klems J.H., Van Den Bossche N., Van Craenendonck S., Feng G., Takada K., Верховский А.А., Шеховцов А.В., Константинов А.П. и др.) посвящены экспериментальному изучению влияния отрицательных температур наружного воздуха на эксплуатационно-технические характеристики оконных конструкций различных

типов. На данный момент разработаны модели деформирования оконных импостов (Калабин В.А.), а также в ограниченном объеме проведены численные исследования температурных деформаций профилей оконной рамы (Сесюнин С.Г., Елдашов Ю.А., Ковров В.Н.). На данный момент еще не выполнено теоретическое описание напряженно-деформированного состояния (далее – НДС) оконных ПВХ конструкций с учетом совместной работы их отдельных элементов (створок со светопрозрачным заполнением, оконного уплотнителя, запорных механизмов, армирующих сердечников и ПВХ профилей). Таким образом, возникает необходимость создания модели НДС оконных ПВХ конструкций как многокомпонентной конструктивной системы, а также детального изучения закономерностей деформаций изгиба и кручения оконных профилей ПВХ при действии зимних эксплуатационных перепадов температур.

**Объектом исследования** являются оконные конструкции из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником.

**Предметом исследования** является напряженно-деформированное состояние оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях.

**Научно-техническая гипотеза** работы заключается в предположении о том, что влияние створок со светопрозрачным заполнением на прогибы силовых элементов оконной конструкции при действии климатических температурных нагрузок тем больше, чем больше гибкость профильных элементов оконной конструкции.

**Целью работы** является разработка и экспериментальное обоснование методики расчета напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях.

**Задачи работы:**

1. Анализ современного состояния вопроса исследования: опубликованных научных работ, опыта применения оконных конструкций из ПВХ профилей в климатических условиях РФ;
2. Численные и экспериментальные исследования температурного режима и напряжённо-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях;
3. Разработка аналитического метода расчета температурных деформаций оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником. Сравнение и оценка точности разработанного метода расчета с данными лабораторных и численных экспериментов.
4. Формулировка критерия ограничения величины температурных деформаций оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником;

5. Обоснование рекомендаций по уменьшению температурных деформаций оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником.

**Научная новизна работы:**

1. Впервые разработана модель напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником, учитывающая начальные продольные и изгибные деформации ПВХ профилей и армирующих стальных сердечников, обусловленные температурными воздействиями, механическое взаимодействие ПВХ профилей и армирующих стальных сердечников, механическое взаимодействие смежных ПВХ профилей (в узлах, через запорные механизмы, через упругие уплотнители), жесткость светопрозрачного заполнения, механическую работу монтажного шва.

2. Впервые разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях, учитывающая фактическое распределение температуры по поперечному сечению армированных ПВХ профилей, схему их крепления к армирующим стальным сердечникам, многокомпонентную структуру оконной конструкции (рама, импосты, створки со светопрозрачным заполнением, монтажный шов), механическую работу оконного уплотнителя.

3. Впервые описаны закономерности распределения усилий в элементах крепления оконных ПВХ профилей к армирующим стальным сердечникам.

4. Разработана методика проведения экспериментальных исследований изгибных деформаций оконной конструкции при климатических температурных воздействиях, которая помимо деформаций силовых элементов (импостов) оконной конструкции учитывает деформации рамы, створок, светопрозрачного заполнения.

5. На основании результатов экспериментальных исследований впервые был определен коэффициент жесткости узла крепления «импост-рама» для различных конструктивных решений оконного блока.

6. Впервые получены результаты экспериментальных исследований, описывающие влияние жесткости створчатых элементов окна со светопрозрачным заполнением в виде стеклопакета на деформацию силовых элементов оконной конструкции при климатических температурных воздействиях.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Модель напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником.
2. Методика расчета напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях.
3. Методика и результаты экспериментальных и численных исследований напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях, соответствующих зимним условиям эксплуатации.
4. Выявленные закономерности распределения усилий в элементах крепления оконных профилей ПВХ к армирующим стальным сердечникам;
5. Рекомендации по снижению температурных деформаций оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником.

**Теоретическая значимость работы:**

1. Разработана методика аналитического расчета параметров температурного поля в поперечном сечении армированного ПВХ профиля при температурных воздействиях.
2. Разработана методика аналитического расчета НДС стержневых элементов при нелинейном распределении температуры в их поперечном сечении, характерном для армированных ПВХ профилей.
3. Разработана методика аналитического расчета НДС ПВХ профилей со стальным армирующим сердечником при температурных воздействиях.
4. Разработана методика аналитического расчета НДС комбинации профилей, представляющей собой группу стержневых элементов, расположенных параллельно друг к другу и соединенных распределенными упругими и жесткими точечными связями, при температурных воздействиях.
5. Исследовано влияние нелинейных свойств ПВХ на напряженно-деформированное состояние оконных профилей при климатических температурных воздействиях.

**Практическая значимость работы:**

1. Разработана численная конечно-элементная параметрическая модель оконной конструкции из ПВХ профилей с армирующей стальным сердечником, позволяющая выполнять анализ ее температурного режима и НДС при климатических температурных воздействиях.

2. Разработана инженерная методика расчета НДС армированного ПВХ профиля при климатических температурных воздействиях, которая может использоваться для предварительной оценки температурного прогиба оконного импоста.

3. Разработана инженерная методика расчета НДС оконных ПВХ конструкций, учитывающая их многокомпонентную структуру, которая позволяет определить деформации оконного уплотнителя, и таким образом, подобрать статические характеристики оконных профилей, гарантирующие сохранение герметичности оконной конструкции при климатических температурных воздействиях.

4. Разработаны теоретически и экспериментально обоснованные рекомендации по изменению конструктивных решений оконных ПВХ конструкций, способствующие уменьшению прогибов профильных элементов окна при климатических температурных воздействиях.

**Методология и методы исследования.** Проведенные исследования основаны на фундаментальных положениях строительной теплофизики, строительной механики, сопротивления материалов и теории планирования эксперимента, а также экспериментальных и теоретических данных в области теплотехнических и прочностных характеристик светопрозрачных конструкций, полученных отечественными и зарубежными учеными.

**Личный вклад автора в результаты работы заключается:**

- в разработке положений, характеризующих научную новизну работы;
- в разработке методик лабораторных и численных экспериментальных исследований, а также в проведении этих исследований, обработке и анализе полученных результатов;
- в разработке аналитической методики расчета напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях, учитывающей фактическое распределение температуры по поперечному сечению армированных ПВХ профилей, схему их крепления к армирующим стальным сердечникам, многокомпонентную структуру оконной конструкции, а также механическую работу оконного уплотнителя.

**Степень достоверности результатов исследования.** Приведенные в диссертации результаты исследований базируются на использовании фундаментальных положений строительной теплофизики, строительной механики и сопротивления материалов. Выводы и рекомендации подтверждаются высокой корреляцией полученных аналитических зависимостей с данными численных и физических экспериментов.

**Апробация результатов исследования.** Результаты теоретических и экспериментальных исследований докладывались и обсуждались на следующих всероссийских и международных научно-технических конференциях:



- Первой Национальной конференции (г. Москва, 30 сентября 2020 г.);
- XXIV International Scientific Conference «Construction the Formation of Living Environment» (г. Москва, 22-24 апреля 2021 г.);
- IX Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (г. Москва, 25 – 26 августа 2021 г.);
- Второй Национальной научной конференции (г. Москва, 8 декабря 2021 г.);
- XXV International Scientific conference on Advance in Civil Engineering «Construction the Formation of Living Environment» (г. Москва, 20-22 апреля 2022 г.);
- XIII Академические чтения, посвященные памяти академика РААСН Осипова Г.Л. «Актуальные вопросы строительной физики. Энергосбережение. Надежность строительных конструкций и экологическая безопасность» (г. Москва, 5 – 7 июля 2022 года);
- Строительная наука и образование в интегрированном пространстве с новыми регионами Российской Федерации (г. Москва, 13 апреля 2023 г.).

В полном объеме диссертационная работа докладывалась на научном семинаре кафедры Комплексной безопасности в строительстве ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» 03 мая 2023 г.

**Внедрение результатов исследования:**

- в компании-производителе ПВХ профилей для изготовления оконных конструкций ООО «Века Рус» (г. Москва) при выполнении НИР по теме: «Влияние температурных и ветровых нагрузок и воздействий на деформации и технико-эксплуатационные характеристики оконных блоков ПВХ».

**Публикации по теме работы.** Материалы диссертации изложены в 9 научных публикациях, из которых 5 работ опубликовано в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (Перечень рецензируемых научных изданий) и 3 работы опубликованы в журналах, индексируемых в международных реферативных базах Web of Science и Scopus.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем работы – 150 страниц, в том числе 24 страницы приложений. Работа включает 61 рисунок и 14 таблиц. Количество источников использованной литературы – 105, в том числе 62 зарубежных источника. Количество приложений – 4.

**Содержание диссертации** соответствует пп. 2 и 9 паспорта научной специальности ВАК 2.1.1. Строительные конструкции, здания и сооружения:

2. Разработка физических и численных методов экспериментальных исследований конструктивных систем, несущих и ограждающих конструкций, конструктивных свойств материалов.

9. Разработка и развитие теоретических основ и методов расчёта ограждающих конструкций зданий и сооружений с учётом природноклиматических, теплофизических, светотехнических, акустических и иных условий.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА РАСЧЕТА НДС ОКОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПВХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

## 1.1 Проблемы проектирования оконных конструкций на основе ПВХ профилей

Окно (оконная конструкция) является светопрозрачной ограждающей конструкцией здания, которая в общем случае включает в себя оконный блок, установленный в оконный проем, систему организации монтажного шва (элементы крепления оконного блока к строительному основанию, систему изоляции монтажного шва) и элементы отделки оконного проема (подоконная доска, отлив, облицовочные элементы откосов). Конструктивные решения окон как строительных ограждающих конструкций должны соответствовать требованиям Федерального Закона от 30 декабря 2009 г. № 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений». Данный Федеральный Закон в т.ч. устанавливает требования к обеспечению механической безопасности элементов здания (ст. 16) и к обеспечению благоприятных санитарно-гигиенических условий в помещениях здания (ст. 29). В разрезе настоящей работы важно отметить три аспекта, отраженные в ст. 16 и 29 384-ФЗ: не допускается разрушение оконных конструкций любого характера, не допускается нарушение эксплуатационной пригодности оконных конструкций (нарушение корректности работы фурнитуры, появление зазоров в узловых элементах окна, нарушение целостности отделочных и изоляционных слоев монтажного шва); не допускается превышение максимальной воздухопроницаемости ограждающих конструкций, установленной исходя из условий создания благоприятного микроклимата помещений. Соответствие конструктивных решений окон требованиям 384-ФЗ достигается следованием положений действующих стандартов и сводов правил. В настоящее время основными стандартами, используемыми при проектировании ПВХ окон, являются [10, 11, 14, 15, 19]. Так, в п. Б.1.6 ГОСТ 23166-2021 «Блоки оконные. Общие технические условия» в явном виде прописано, что оконные конструкции д.б. спроектированы таким образом, чтобы при действии ветровых, температурных и пр. нагрузок не происходило разрушения и чрезмерных деформаций их элементов. В тоже время рассматриваемые нормативные документы не дают методик расчета напряженно-деформированного состояния оконных конструкций, которые позволили бы на стадии проектирования проверить выполнение данного требования в полном объеме. Элементы методики расчета механической работы оконных конструкций при действии ветровых нагрузок представлены в ГОСТ Р 56926-2016 «Конструкции оконные и балконные различного функционального назначения для жилых зданий. Общие технические условия». В

соответствии с п. 5.2.1.1 данного документа расчетная модель оконного блока представляет собой раму, состоящую из коробки и импоста(ов) оконного блока и прикрепленную к абсолютно жёсткому основанию плавающими шарнирами (в местах расположения анкеров или монтажных пластин). При этом, согласно п. Б.2.5 ГОСТ 23166-2021 жесткостью створчатых элементов (вместе со светопрозрачным заполнением), а также жесткостью самих ПВХ профилей при расчетах следует пренебречь. Такая расчетная модель позволяет определить перемещение профильных элементов окна от действия ветровой нагрузки, также она используется при определении усилий, возникающих в элементах крепления оконного блока к строительному основанию. При этом данная расчетная модель:

- не учитывает температурные нагрузки;
- не учитывает наличие монтажного шва из монтажной пены, который обеспечивает дополнительное крепление оконного блока в проеме и, очевидно, приводит к перераспределению усилий между крепежными элементами окна (анкерами, монтажными пластинами);
- не способна точно предсказывать силы реакции, возникающие в элементах крепления оконного блока, поскольку не учитывает его реальной жесткости, что недопустимо при расчете статически неопределимых конструкций;
- даёт сильно завышенные расчетные значения прогибов в сравнении с реальной работой оконной конструкции под нагрузкой из-за пренебрежения жесткостью створок (со светопрозрачным заполнением) и жесткостью самих ПВХ профилей [25, 82, 83];
- не способна предсказывать напряжения в ПВХ профилях и в местах их соединения, поскольку в принципе не рассматривает их участие в механической работе оконной конструкции.

Наиболее актуальные требования, устанавливающие максимально допустимые прогибы профильных элементов окна, приведены в ГОСТ 23166-2021, при этом речь идет о «силовых профильных элементах» (п. Б.2.3) – в первую очередь оконных импостах, однако данный документ не сообщает о критериях выбора значений предельных прогибов. Эта информация содержится в ГОСТ Р 56926-2016, где указано, что основным критерием для назначения предельных прогибов силовых элементов окон является ограничение по их воздухопроницаемости (п. 5.2.1.2, п. 5.2.1.4, п. Б.5). Таким образом, нормативно-технические документы устанавливают связь между деформированным состоянием оконной конструкции и её воздухопроницаемостью, что говорит об обоснованности совместного рассмотрения этих явлений. При этом вне фокуса их внимания остаются вопросы ограничения прогибов элементов оконной конструкции исходя из условий корректной работы оконной фурнитуры, а также целостности монтажного шва и элементов его отделки.

## 1.2 Анализ исследований напряженно-деформированного состояния оконных ПВХ конструкций при климатических температурных воздействиях

ПВХ, применяемый для изготовления оконных блоков, имеет коэффициент линейного температурного расширения равный  $7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  [2], что в 14 раз больше, чем у дерева, и в 3 раза больше, чем у алюминия [1], поэтому среди всех типов оконных конструкций ПВХ окна в наибольшей степени подвержены температурным деформациям. В зимних условиях эксплуатации температурный градиент, возникающий в элементах окна, приводит к их прогибу в сторону помещения. Существующие экспериментальные исследования показывают, что прогиб импоста ПВХ окна от действия зимней температурной нагрузки может быть сопоставим с прогибом от воздействия ветра ураганной силы [20, 84, 98]. При этом прогиб от положительной ветровой нагрузки суммируется с температурным прогибом, что в итоге приводит к деформациям значительно большим, нежели те, на которые была рассчитана оконная конструкция. Несмотря на столь значительную величину температурных деформаций ПВХ окон, в настоящее время практически отсутствуют попытки их теоретического описания. Так, моделирование и прочностная оценка температурного воздействия на оконный блок средствами программного комплекса ANSYS была произведена в работе [38]. В работах [21, 22] рассмотрен один из важных аспектов ПВХ конструкций: совместная механическая работа ПВХ профиля с армирующим сердечником. Даны формулы определения прогиба армированного ПВХ профиля от действия температурной нагрузки при зимних и летних условиях эксплуатации, однако в них не учитывается: фактический характер распределения температуры по поперечному сечению армированного ПВХ профиля (который отличается о линейного) и характер крепления армирующего сердечника во внутренней полости ПВХ профиля (количество точек крепления, их шаг, а также положение относительно нейтральной оси ПВХ профиля и армирующего сердечника). Как будет показано в настоящей работе, эти факторы оказывают существенное влияние на механическую работу армированного ПВХ профиля при температурной нагрузке.

Причиной изменения НДС конструкции при действии температурной нагрузки является изменение температурного поля в элементах данной конструкции. Расчетам температурного поля оконных ПВХ конструкций при различных режимах эксплуатации посвящено значительное количество работ [51, 52, 57, 87, 88, 91, 94, 97]. Во всех работах температурные поля в узлах оконных конструкций рассчитываются численным методом исключительно в двухмерной постановке. Ни в одной из работ не делалось попытки расчета трехмерного температурного поля оконной ПВХ конструкции с учётом всех её конструктивных особенностей. Другой чертой указанных научных работ является то, что в них не анализируется вид самого температурного поля в элементах оконной конструкции, а все внимание сосредоточено на вопросах обеспечения

требований по тепловой защите. Тем не менее для проведения расчетов НДС конструкции при температурных нагрузках значение имеет именно вид распределения температуры в её элементах.

Профильные элементы оконной ПВХ конструкции, армированные стальным сердечником, представляют собой пример плоских (работающих преимущественно в одной плоскости) составных стержней с сосредоточенными (дискретными) связями. Основы теории расчета составных стержней достаточно широко представлены в монографии [35]. К настоящему моменту решены многие задачи механики составных стержней, однако все они посвящены либо металлическим [28, 90, 96], либо деревянным [31, 36], либо железобетонным [24, 41, 62, 65, 74] конструкциям, каждая из которых имеет свою специфику, отличную от специфики ПВХ конструкций, армированных стальными сердечниками. Существует также ряд работ, посвященных общим теоретическим вопросам механики составных стержней [30, 42, 67], однако данные работы в значительной степени основаны на упомянутой монографии [35] и представляют собой использование ее математического аппарата для решения конкретного типа задач, в перечне которых отсутствуют вопросы, аналогичные вопросам о расчете НДС армированного ПВХ профиля при температурной нагрузке. Таким образом, существующие в данный момент методы расчета составных стержней не могут быть использованы для расчета НДС армированных ПВХ профилей при действии климатической температурной нагрузки.

Другой важной проблемой, не решенной к настоящему моменту, является учет многокомпонентной структуры оконной конструкции при расчете её НДС. В научной литературе отсутствует описание методов расчета оконной конструкции, как многокомпонентной системы, т.е. с учётом совместной механической работы рамы, импоста, створок, светопрозрачного заполнения. Это можно связать с очевидными трудностями проведения таких расчётов, но в первую очередь это связано с отсутствием теоретической основы для построения методов подобных расчетов (методы трехмерного численного моделирования в данном случае являются чрезмерно ресурсоемкими). Смежные элементы оконной конструкции в т.н. комбинации профилей (термин устанавливается ГОСТ 30674-99) взаимодействуют друг с другом посредством уплотнителей, которые представляют собой упругие связи, действующие между профилями почти по всей их длине, помимо этого смежные профильные элементы окна могут взаимодействовать друг с другом через точечные связи – элементы запорного механизма. В теоретической механике нет описания подобных систем. Наиболее близкий к рассматриваемому случай, для которого разработан математический аппарат – это механическая работа балок на упругом основании. В достаточном для целей настоящей работы объеме он описан в работах [9, 23].

### 1.3 Обзор исследований, устанавливающих влияние температурных деформаций на эксплуатационные характеристики оконных ПВХ конструкций

Как уже было отмечено, температурные деформации способны влиять на эксплуатационные характеристики оконных ПВХ конструкций. Экспериментально подтверждено, что они снижают воздухопроницаемость оконных конструкций [5, 29, 43, 44, 54, 64, 68, 72, 80, 85], ухудшают звукоизоляцию [86], а также нарушают теплотехнические характеристики оконных конструкций [26], что может привести к снижению энергоэффективности здания [7, 56, 60, 61, 63, 70, 73, 99], а также нарушению микроклимата помещений здания.

Одним из ключевых параметров оконной конструкции является её воздухопроницаемость. Фактическую воздухопроницаемость оконных конструкций определяют исключительно экспериментальным путем установления постоянной разности давлений  $\Delta P$  по обе стороны образца оконной конструкции и замера расхода воздуха  $Q$ , проходящего через образец. Такие измерения повторяют несколько раз для определения зависимости  $Q(\Delta P)$ , которую принято аппроксимировать степенной функцией [81, 76] (хотя имеется ряд работ, которые отстаивают применение квадратичного уравнения инфильтрации для этих целей [50, 59, 66, 75]). Методика экспериментального определения воздухопроницаемости окон, регламентированная [12], не учитывает температурные деформации оконных конструкций, которые, как уже было показано, для ПВХ окон могут достигать больших значений. Температурные деформации приводят к уменьшению силы обжатия уплотнителей в конструкции окна, что нарушает их герметичность и, как следствие, приводит к повышению воздухопроницаемости. По-видимому, впервые этот феномен был исследован в 1970 г. в работе [54], где экспериментально было установлено, что воздухопроницаемость окон с двумя подъемно-опускными створками увеличивается при снижении температуры наружного воздуха. Была предложена формула, описывающая изменение воздухопроницаемости:

$$I = I_0 + S \cdot I_0 \cdot \Delta T \quad (1.1)$$

где  $I$  – воздухопроницаемость при перепаде температур по обе стороны окна  $\Delta T$ ,  $I_0$  – воздухопроницаемость окна при  $\Delta T = 0$ ,  $S$  – константа, зависящая от типа окна.

Данная формула является чисто эмпирической, коэффициент  $S$  в ней может быть определен исключительно экспериментальным путем, она линейна и изначально применима только к окнам с подъемно-опускными створками, тем не менее это была первая попытка описать зависимость воздухопроницаемости оконных конструкций от температурных нагрузок.

Весьма знаковой в рассматриваемом вопросе является работа [80]. В ней обсуждается несостоятельность применяемой в США на момент написания статьи (1985 г.) методики

определения воздухопроницаемости оконных конструкций [48] (которая легла в основу существующего до настоящего времени в РФ стандарта на методы испытания). Данная методика подвергалась критике, поскольку она не учитывает:

1. нарушение идеальной прямоугольной формы оконного блока при установке;
2. температурные деформации элементов окна;
3. усадку материала уплотнителя с течением времени.

Был предложен к разработке новый метод испытанию оконных конструкций на воздухопроницаемость с учетом температурной нагрузки. Этот метод был реализован в 1991 г. в новом стандарте [49], который до сих пор существует и действует параллельно со стандартом [48]. На территории РФ методика определения воздухопроницаемости оконных конструкций с учетом температурных воздействий была запатентована в 2012 г. [6], но так и не стала обязательной к применению. Причиной этого является сложность реализации испытаний по данной методике (и подобным ей). Можно ожидать, что с разработкой метода расчета деформированного состояния оконных конструкций с учётом температурных нагрузок появится возможность разработать полуэмпирические методы оценки воздухопроницаемости оконных конструкций при различных температурных режимах, не требующие значительных затрат.

Ряд работ зарубежных исследователей предоставляют результаты испытания воздухопроницаемости окон, имеющих различную конфигурацию и изготовленных из различных материалов, при различных перепадах температур [44, 64, 68]. Эти исследования в основном только констатируют факт феномена температурных деформаций, и согласно их результатам, воздухопроницаемость окон может повышаться в 2-7 раз при снижении температуры наружного воздуха до  $-30^{\circ}\text{C}$ . Тем не менее с момента опубликования исследования [72] на данную тему в 1998 г. на западе к ней уже больше не возвращались. В работе [72] было оценено влияние феномена изменения воздухопроницаемости окон при понижении температуры наружного воздуха на энергетический баланс здания. Результатом стал вывод о том, что данный феномен не влияет значительно на энергетический баланс здания и потому в повседневной проектной деятельности им можно пренебречь. Нужно отметить, что эти результаты были получены из расчета температуры наружного воздуха в отопительный период не ниже  $-5^{\circ}\text{C}$ , что является приемлемым для стран Европы, но неприемлемым для многих регионов РФ, тем не менее подобной оценки для климатических условий Российской Федерации проведено не было.

В России, наоборот, проблеме изменения воздухопроницаемости оконных конструкций при действии температурных нагрузок начали уделять внимание в последние 13 лет. О проблемах, которые возникают при эксплуатации ПВХ окон зимой стали сообщать с 2010 г., в то время ужесточились требования по тепловой защите зданий, что вынудило проектировщиков перейти на оконные системы с большей шириной профильных элементов. С тех пор был



проведен ряд экспериментов [5, 29, 43, 85], которые подтверждают выводы зарубежных исследований: воздухопроницаемость оконных конструкций может увеличиваться в 3-10 раз при снижении температуры наружного воздуха до  $-30\dots-50^{\circ}\text{C}$ .

Таким образом, обзор существующих исследований говорит о том, что исключение фактора температуры при определении воздухопроницаемости оконных конструкций ведет к явному искажению данных об их действительных эксплуатационных характеристиках. Это, в свою очередь, негативно отражается на параметрах микроклимата внутренних помещений здания. Так, существуют нормы, которые устанавливают требуемые параметры микроклимата помещений различного назначения [16, 37, 39] и предоставляют инструменты, позволяющие количественно оценить влияние этих параметров на субъективное ощущение комфорта/дискомфорта от пребывания в помещении [17, 45, 89, 101, 102, 104]. Одним из параметров, влияющих на ощущение комфорта человеком, является скорость движения воздушной среды в помещении [55, 77, 92, 100, 105], которая в значительной степени зависит от герметичности окон, т.е. от их воздухопроницаемости [47, 103]. При нарушении герметичности окон в зимний период времени увеличивается скорость поступления холодного воздуха внутрь помещения, что приводит к появлению сквозняка.

### **1.3 Выводы к 1 главе**

1. В существующих на данный момент нормативно-технических документах в области проектирования оконных конструкций в должной мере не рассмотрен вопрос необходимости расчета подобных конструкций на климатические температурные воздействия. С одной стороны, они утверждают необходимость учитывать температурные нагрузки при конструктивном расчете оконных конструкций, с другой стороны, не предоставляют методов подобного расчета. Причина данной ситуации кроется в том, что подобные методы к настоящему моменту не были разработаны. Единственными доступными способами определения НДС оконных конструкций при температурных нагрузках остается эксперимент и полноценное трехмерное конечно-элементное моделирование. Первый из них не может быть применен на раннем этапе проектирования, второй является чрезмерно трудоемким.

2. Профильные элементы оконных ПВХ конструкций являются примером составных стержней. В настоящее время детально рассмотрены задачи механической работы составных стержней металлических, деревянных, железобетонных и сталежелезобетонных конструкций, однако эти результаты не могут быть использованы для расчета НДС армированных ПВХ профилей при действии климатических температурных нагрузок в виду специфики ПВХ окон, отличающей их от классических строительных конструкций. Рассмотрение вопросов совместной

механической работы ПВХ профиля и стального сердечника является одной из задач настоящей работы.

3. В настоящее время в научной литературе отсутствует описание методов расчета НДС оконных конструкций, как многокомпонентных систем, т.е. с учётом совместной механической работы рамы, импоста, створок, светопрозрачного заполнения, контуров упругого уплотнения и запорных механизмов. Единственная существующая модель механической работы оконной ПВХ конструкции представляет её в виде рамы с импостами, при этом она: не способна точно предсказывать силы реакции, возникающие в элементах крепления оконного блока, поскольку не учитывает его реальной жесткости, что недопустимо при расчете статически неопределимых конструкций; даёт сильно завышенные значения прогибов в сравнении с реальной работой оконной конструкции под нагрузкой из-за пренебрежения жесткостью створок (со светопрозрачным заполнением) и жесткостью самих ПВХ профилей; не способна предсказывать напряжения в ПВХ профилях и в местах их соединений, поскольку в принципе не рассматривает их участие в механической работе оконной конструкции. Создание методики расчета НДС оконных ПВХ конструкций как многокомпонентных систем является ключевой задачей настоящего исследования.

4. Расчетам температурного поля оконных ПВХ конструкций при различных режимах эксплуатации посвящено значительное количество работ, однако ни в одной из них не делалось попытки расчета трехмерного температурного поля оконной ПВХ конструкции с учётом всех её конструктивных особенностей. Другой чертой указанных работ является то, что в них не анализируется вид самого температурного поля в элементах оконной конструкции, а все внимание сосредоточено на вопросах обеспечения требований по тепловой защите.

4. Обзор проведенных экспериментальных исследований показал, что деформации ПВХ окон при зимних температурных воздействиях, характерных для многих регионов РФ, сопоставимы с деформациями от ветровых нагрузок. Существует значительное количество экспериментальных работ, подтверждающих ухудшение эксплуатационных характеристик оконных ПВХ конструкций в следствие изменения их деформированного состояния при зимних температурных воздействиях.

6. Исходя из всего вышесказанного является целесообразным выполнить теоретические и экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей при климатических температурных воздействиях, соответствующих зимним условиям эксплуатации, и разработать на их основе инженерный метод расчета температурных деформаций подобных конструкций.

## ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОКОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПВХ ПРОФИЛЕЙ ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 2.1 Исследование характера температурного поля в профильных элементах оконных конструкций ПВХ

Поскольку причиной температурных деформаций является изменение температурного поля в элементах строительной конструкции, в первую очередь были проведены исследования распределения температуры в профильных элементах окна (при зимних условиях эксплуатации).

В программе трехмерного конечно-элементного моделирования COMSOL Multiphysics® была разработана модель двухстворчатого ПВХ окна типовой конструкции с общими габаритами 1400x1200 мм, установленного в стеновой проем. В модели была использована профильная система Veka Softline шириной 70 мм. На внутренней и наружной поверхностях модели были заданы стандартные условия теплообмена с окружающей средой, характеризующиеся коэффициентами тепловосприимчивости  $\alpha_n^{cm}=8.7$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С);  $\alpha_n^{ок}=8.0$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С) и теплоотдачи  $\alpha_e=23$  (Вт/м<sup>2</sup>·°С). Температурное поле модели было рассчитано при наружной температуре  $T_{ex}=-20$  °С и внутренней температуре  $T_{in}=20$  °С (рисунок 2.1). Оконные ПВХ профили имеют внутренние воздушные камеры, теплопередача в которых осуществляется, в основном, посредством излучения и конвекции. Прямое моделирование данных процессов нецелесообразно, поскольку требует огромных вычислительных затрат. В виду этого теплопередача в объеме воздушных камер ПВХ профилей рассчитывалась упрощенно, посредством решения уравнения теплопроводности с использованием эквивалентного сопротивления теплопередаче, определяемого внутренними средствами программы COMSOL [69, 71]. Теплообмен в газовой прослойке стеклопакета рассчитывался по методике [18], уравнения которой были интегрированы в расчетную модель.

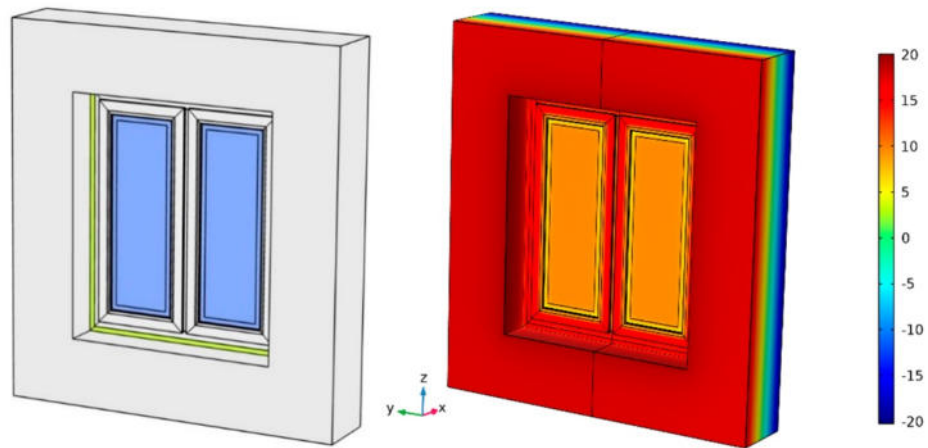


Рисунок 2.1 – Трехмерная модель окна ПВХ и результат расчета поля температур (легенда в °С)

Анализ результатов расчета показал, что функцию распределения температуры в сечении оконного ПВХ профиля, армированного стальным сердечником, возможно заменить одномерной функцией, характеризующейся четырьмя различными значениями температуры в четырех точках поперечного сечения (рисунок 2.2). В следствие наличия стального сердечника температурное поле в центральной зоне ПВХ профиля является практически полностью однородным. Это объясняется низким термическим сопротивлением стального сердечника, в результате которого градиент температуры в его поперечном сечении стремится к нулю. Данный результат согласуется с результатами расчета температурного поля в поперечных сечениях ПВХ окон, представленных в иных публикациях [51, 57, 87, 88, 91, 94].

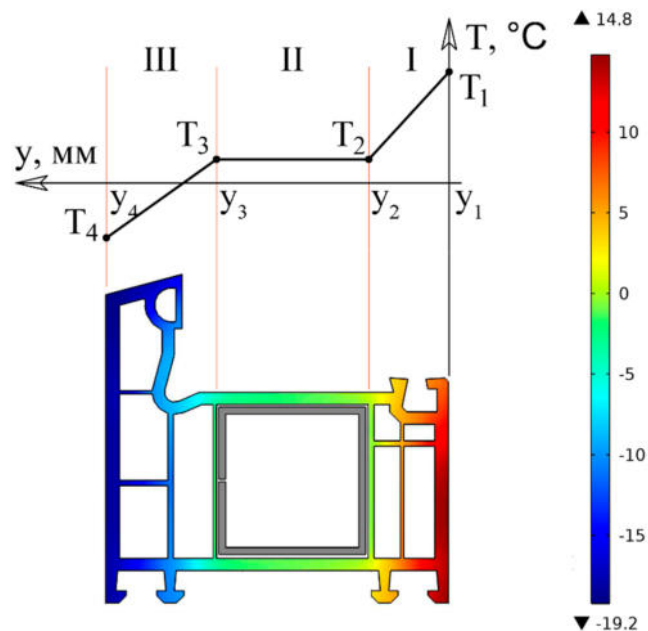


Рисунок 2.2 – Характер распределения температур в поперечном сечении ПВХ профиля, полученный в результате расчета температурного поля для трехмерной модели окна (легенда в °С)

Температурное поле, показанное на рисунке 2.2 вверху, характерно для однородной трехслойной ограждающей конструкции, что позволяет предложить способ его аналитического расчета. Поперечное сечение армированного ПВХ профиля должно быть разделено на три части (I, II и III на рисунке 2.2), в пределах которых градиент температуры остается постоянным. Точки, определяющие границы данных частей могут быть выбраны расположенными на стенках камеры ПВХ профиля, содержащей стальной сердечник. Поскольку термическое сопротивление центральной части профиля много меньше его общего термического сопротивления, можно положить  $R_{II}=0$ , тогда общее термическое сопротивление профиля будет складываться из термического сопротивления его I и III части:

$$R_0 = R_I + R_{III} \quad (2.1)$$

Термическое сопротивление профиля  $R_0$  как правило сообщается производителем профильной системы. Также оно может быть определено лабораторным путем по имеющимся методикам [13]. Для нахождения величин  $R_I$  и  $R_{III}$  необходимо задаться их соотношением. Для симметричных (с точки зрения расположения воздушных камер) ПВХ профилей (таких как показанный на рисунке 2.2) в первом приближении можно положить  $R_I = R_{III}$ , тогда:

$$R_I = R_{III} = \frac{R_0}{2} \quad (2.2)$$

При несимметричном профиле отношение между величинами  $R_I$  и  $R_{III}$  можно принять равным отношению количества воздушных камер в I и III частях сечения ПВХ профиля ( $k_R$ ), тогда:

$$R_I = \frac{R_0}{k_R + 1}; R_{III} = R_0 - R_I \quad (2.3)$$

Далее необходимо выполнить теплотехнический расчет для случая однородной трёхслойной ограждающей конструкции с термическим сопротивлением слоев  $R_I$ ,  $R_{II}$  и  $R_{III}$ . Таким образом будет построен график распределения температуры, т.е. найдены 4-ре значения температуры в характерных точках сечения ПВХ профиля. Данный расчет ведется по стандартной методике строительной физики по формулам:

$$Q = \frac{T_{in} - T_{ex}}{\frac{1}{\alpha_{in}} + R_0 + \frac{1}{\alpha_{ex}}} \quad (2.4)$$

$$\tau_1 = T_{in} - \frac{Q}{\alpha_{in}}; \tau_2 = \tau_1 - \frac{Q}{R_I}; \tau_3 = \tau_2; \tau_4 = T_{ex} + \frac{Q}{\alpha_{ex}}$$

Для оценки точности результата, полученного по предложенному методу, определим параметры температурного поля в поперечном сечении профиля рамы, показанного на рисунке 2.2. Условия расчета будут совпадать с условиями, принятыми в численной модели:  $\alpha_e^{ок}=8.0$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С);  $\alpha_n=23$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С);  $T_{in}=20$  °С;  $T_{ex}=-20$  °С. Рассматриваемый профиль рамы обладает

общим термическим сопротивлением  $R_0 = 0.77 \text{ м}^2 \cdot \text{°C}/\text{Вт}$ . По формуле (2.2) определяем:  $R_I = R_{III} = 0.385 \text{ м}^2 \cdot \text{°C}/\text{Вт}$ . При помощи формул (2.4) производим построение графика температуры (рисунок 2.3).

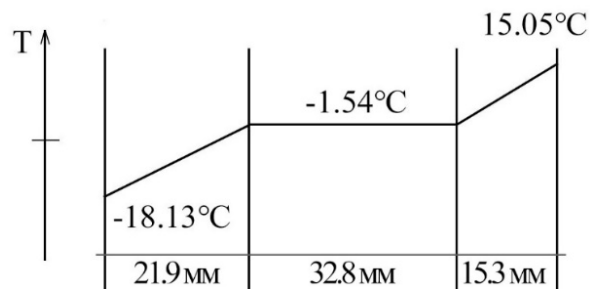


Рисунок 2.3 – Результат аналитического расчета распределения температуры поперек профиля.

Сравним полученный результат с результатом численного моделирования. Для этого была определена разница между значениями температурного поля, изображенного на рисунке 2.2, и значениями температурного поля, изображенного на рисунке 2.3 (рисунок 2.4).

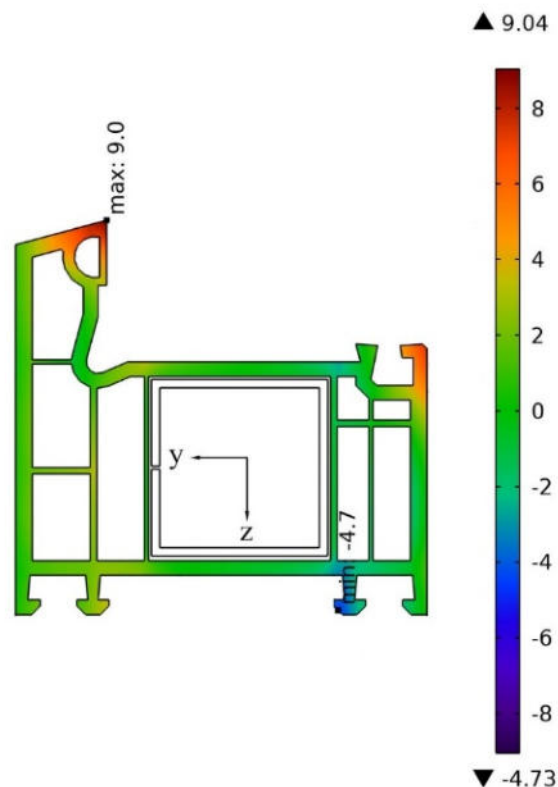


Рисунок 2.4 – Разница между аналитическим расчетом и результатом компьютерного моделирования, °C

На рисунке 2.4 видно, что на большей части поперечного сечения рассматриваемого профиля разница между численным и аналитическим расчетом составляет не более  $2^\circ\text{C}$  (зеленая зона). Наблюдаются локальные участки, в пределах которых эта разница становится существенной (до  $9^\circ\text{C}$ ), но они имеют небольшие в сравнении с поперечным сечением профиля размеры. Неполное соответствие результатов численного расчета результатам, полученным по

предлагаемой методике, объясняется сложными условиями теплопередачи внутри ПВХ профиля: ПВХ профиль представляет собой неоднородный в теплотехническом отношении элемент конструкции, обладает сложной формой с внутренними замкнутыми воздушными камерами. Точный расчёт температурного поля для такого элемента может быть выполнен только численными методами. Тем не менее можно констатировать, что разработанная методика аналитического расчета параметров температурного поля в поперечном сечении армированного ПВХ профиля даёт результат, точность которого достаточна для решения инженерных задач.

В теоретической механике известны уравнения, описывающие температурный изгиб балочных элементов, однако они получены из предположения о линейном изменении температуры по поперечному сечению профиля, в то время как в армированном ПВХ профиле распределение температуры сильно отличается от линейного (рисунок 2.5). В виду этого для армированного ПВХ профиля необходимо разработать новый метод расчета изгибных температурных деформаций.

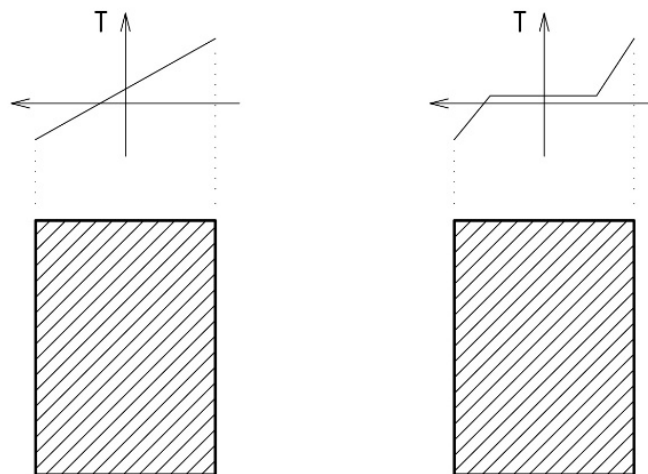


Рисунок 2.5 – Распределение температуры по сечению балочного элемента. Отличие рассматриваемого случая (справа) от классического (слева)

## 2.2 Методика расчета напряженно-деформированного состояния оконного профиля ПВХ при действии ступенчатого температурного поля

Найдём напряжения, возникающие в поперечном сечении ПВХ профиля при изменении температурного поля. Пусть температура в конечном состоянии ПВХ профиля в каждой его точке задается функцией  $T(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})$ , где  $Ox_{obj}y_{obj}z_{obj}$  – материальная (лагранжевая) система координат профиля, ось  $x_{obj}$  которой направлена вдоль его продольной оси (рисунок 2.6).

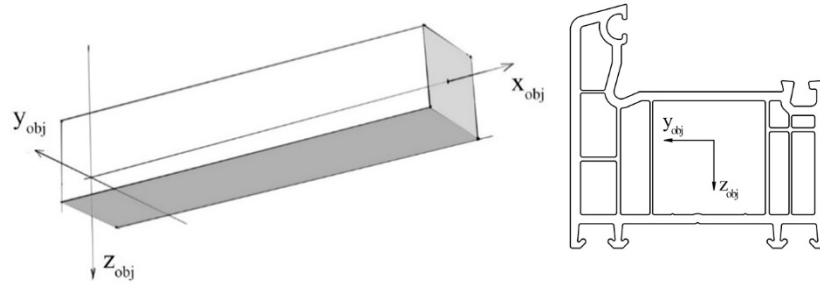


Рисунок 2.6 – Материальные координаты профиля

В точке с произвольными координатами  $(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})$  выделим бесконечно малый куб, стороны которого ориентированы параллельно осям рассматриваемой системы координат (рисунок 2.7). В начальный момент времени температура выделенного материала была равна  $T_{ref}$ . После изменения температурного поля она стала равна  $T(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})$ , т.е. температура изменилась на  $\Delta T = T(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj}) - T_{ref}$ . Пусть выделенный элементарный куб имеет возможность свободно деформироваться во всех направлениях. ПВХ является изотропным материалом, поэтому задача рассматривается именно для изотропного материала, тогда в результате изменения температуры на величину  $\Delta T$  длина каждой из граней элементарного куба будет равна  $da(1 + \alpha \cdot \Delta T)$ , а грани куба сохранят свою взаимную перпендикулярность (переход 1 на рисунке 2.7). В этом состоянии напряжения в элементарном кубе будут отсутствовать, однако теперь, чтобы вернуть его размеры к первоначальным значениям (переход 2 на рисунке 2.7), к каждой его грани необходимо приложить сжимающее усилие. Переход 2 на рисунке 2.7 описывается следующей матрицей линейного преобразования:

$$A_t = \frac{1}{1 + \alpha \cdot \Delta T(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

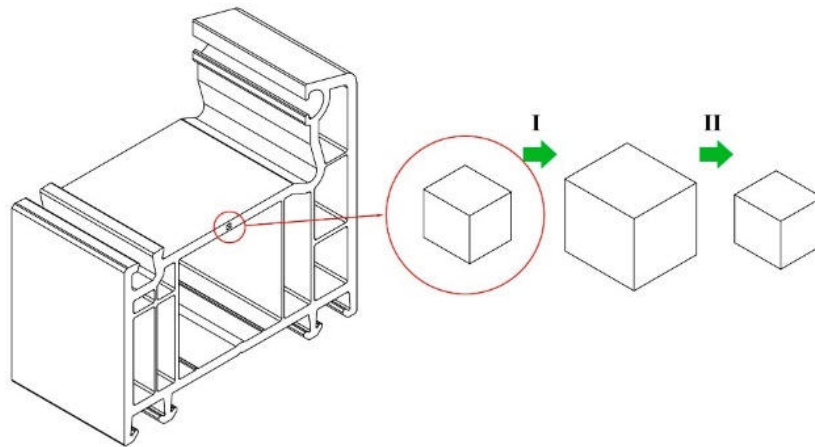


Рисунок 2.7 – Преобразования элементарного куба

Матрица  $A_t$  может быть использована для определения тензора напряжений  $\sigma$  в рассматриваемой точке профиля (в настоящем случае этот тензор будет шаровым). Данный



тензор напряжения будет соответствовать нулевой функции перемещения точек профиля  $\mathbf{u}(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj}) \equiv 0$ , т.е. недеформированному состоянию.

Пусть имеется векторная функция одной переменной  $\mathbf{u}_{ax}(x_{obj})$ , которая отображает ось  $x_{obj}$  профиля в кривую  $\alpha$ , находящуюся в пространстве  $Oxuz$  (рисунок 2.8). В соответствии с теоремой о плоских сечениях постулируем, что поперечное сечение профиля в деформированном состоянии остается плоским и ориентировано нормально вектору  $\boldsymbol{\tau}$ , лежащему на касательной к кривой  $\alpha$ .

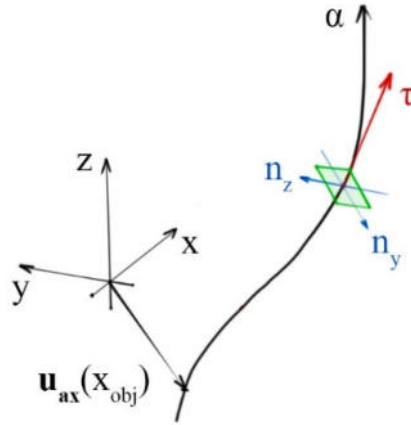


Рисунок 2.8 – Изгиб оси балки

Введем в произвольной точке кривой  $\alpha$  правый ортонормированный базис векторов  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{n}_y$ ,  $\mathbf{n}_z$ :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}} \left| \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^{-1} \quad \bar{\mathbf{n}}_z = \frac{d^2\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}^2} \times \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}} \left| \frac{d^2\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}^2} \times \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^{-1} \quad \bar{\mathbf{n}}_y = \bar{\mathbf{n}}_z \times \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (2.6)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что кривая  $\alpha$  лежит целиком в плоскости  $Oxz$ , тогда:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax1}}{dx_{obj}} \\ 0 \\ \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax3}}{dx_{obj}} \end{pmatrix} \left| \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^{-1} \quad \bar{\mathbf{n}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{n}}_y = \begin{pmatrix} \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax3}}{dx_{obj}} \\ 0 \\ -\frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax1}}{dx_{obj}} \end{pmatrix} \left| \frac{d\bar{\mathbf{u}}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^{-1} \quad (2.7)$$

Отметим, что  $\bar{\mathbf{n}}_y = \alpha_{y\perp} \bar{\boldsymbol{\tau}}$ , где  $\alpha_{y\perp}$  - матрица поворота на  $90^\circ$  вокруг оси  $y$ .

Далее составим функцию, которая задает взаимно-однозначное соответствие между положением точек тела в координатах  $Ox_{obj}y_{obj}z_{obj}$  (исходное состояние) и их положением в координатах  $Oxuz$  (деформированное состояние):

$$\vec{R}(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj}) = \bar{\mathbf{u}}_{ax}(x_{obj}) + \bar{\mathbf{n}}_z z_{obj} + \bar{\mathbf{n}}_y y_{obj} \quad (2.8)$$

Запишем матрицу Якоби функции преобразования  $\mathbf{R}$ :

$$J_R = \begin{pmatrix} \frac{du_{ax1}}{dx_{obj}} + y_{obj} \frac{dn_{y1}}{dx_{obj}} & n_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{du_{ax3}}{dx_{obj}} + y_{obj} \frac{\partial n_{y3}}{dx_{obj}} & n_{y3} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Найдём тензор градиента деформации [33]:

$$T = J_R^T \cdot J_R = \begin{pmatrix} \left(\frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} + y_{obj} \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}}\right)^2 & y_{obj} \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} \cdot \bar{n}_y & 0 \\ y_{obj} \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} \cdot \bar{n}_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Найдём производную вектора  $\mathbf{n}_y$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} &= \frac{d(\alpha_{y\perp} \bar{\tau})}{dx_{obj}} = \alpha_{y\perp} \frac{d\bar{\tau}}{dx_{obj}} = \alpha_{y\perp} \frac{d}{dx_{obj}} \left( \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^{-1} \right) = \\ &= \alpha_{y\perp} \frac{\frac{d^2 \bar{u}_{ax}}{dx_{obj}^2} \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| - \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \frac{d}{dx_{obj}} \left( \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| \right)}{\left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_{obj}} \left( \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| \right) &= \frac{d}{dx_{obj}} \left( \sqrt{\left(\frac{du_{ax1}}{dx_{obj}}\right)^2 + \left(\frac{du_{ax2}}{dx_{obj}}\right)^2 + \left(\frac{du_{ax3}}{dx_{obj}}\right)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{du_{ax1}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d^2 u_{ax1}}{dx_{obj}^2} + 2 \cdot \frac{du_{ax2}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d^2 u_{ax2}}{dx_{obj}^2} + 2 \cdot \frac{du_{ax3}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d^2 u_{ax3}}{dx_{obj}^2}}{\sqrt{\left(\frac{du_{ax1}}{dx_{obj}}\right)^2 + \left(\frac{du_{ax2}}{dx_{obj}}\right)^2 + \left(\frac{du_{ax3}}{dx_{obj}}\right)^2}} = \frac{\frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d^2 \bar{u}_{ax}}{dx_{obj}^2}}{\left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{n}_y}{dx_{obj}} &= \alpha_{y\perp} \frac{\frac{d^2\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}^2} \left| \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| - \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \frac{d^2\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}^2}}{\left| \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2} = \\
&= \alpha_{y\perp} \frac{\frac{d^2\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}^2} \left( \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right) - \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \left( \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d^2\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}^2} \right)}{\left| \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^3} = \\
&= \alpha_{y\perp} \frac{\left[ \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \times \left[ \frac{d^2\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}^2} \times \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right] \right]}{\left| \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^3}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Обозначим литерой  $\vec{K}$  вектор, модуль которого равен кривизне линии  $\alpha$  и направление которого совпадает с вектором  $\vec{n}_z$ :

$$\vec{K} = \frac{\frac{d^2\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}^2} \times \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}}}{\left| \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^3} \tag{2.14}$$

С учетом этого перепишем:

$$\frac{d\vec{n}_y}{dx_{obj}} = \alpha_{y\perp} \left( \frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \times \vec{K} \right) \tag{2.15}$$

Если обратиться к рисунку 2.9, становится понятно, что вектор  $\frac{d\vec{u}_{ax}}{dx_{obj}} \times \vec{K}$ , повернутый на  $90^\circ$ , будет перпендикулярен вектору  $\vec{n}_y$ , в силу чего  $T_{12}=T_{21}=0$ .

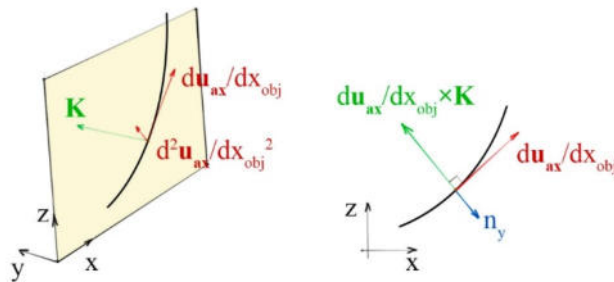


Рисунок 2.9 – К выводу компонент метрического тензора

Воспользовавшись полученными соотношениями, запишем значение  $T_{11}$ :

$$T_{11} = \left( \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} + y_{obj} \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} \right)^2 = \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2 + y_{obj}^2 \left| \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} \right|^2 + 2y_{obj} \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} \quad (2.16)$$

$$\left| \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} \right| = \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \times \vec{K} \right| = \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| \cdot |\vec{K}| \quad (2.17)$$

$$\frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \cdot \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} = \pm \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| \cdot \left| \frac{d\bar{n}_y}{dx_{obj}} \right| = \pm \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2 \cdot |\vec{K}| \quad (2.18)$$

Окончательно:

$$T_{11} = \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2 + y_{obj}^2 K^2 \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2 \pm 2y_{obj} K \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2 = \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2 (1 \pm y_{obj} K)^2 \quad (2.19)$$

где  $K$  – кривизна оси профиля в точке  $x_{obj}$ .

Тензор градиента деформации при этом будет иметь вид:

$$T = J_R^T \cdot J_R = \begin{pmatrix} \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|^2 (1 + y_{obj} K)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

В выражении (2.20) кривизна оси профиля  $K$  может быть как положительной, так и отрицательной, при этом выбор знака производится в соответствии с рисунком 2.10.

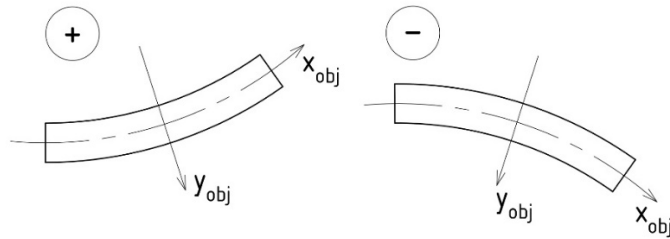


Рисунок 2.10 – Правило выбора знака кривизны профиля

На основании тензора градиента деформаций (2.20) возможно судить о характере деформаций, происходящих в точках ПВХ профиля. Так, нулевые компоненты (2.20), стоящие не на главной диагонали, свидетельствуют о том, что перпендикулярные линии, проведенные параллельно осям  $x_{obj}$ ,  $y_{obj}$ ,  $z_{obj}$  в недеформированном состоянии профиля, остаются перпендикулярными и после деформаций, при этом в направлении оси  $x_{obj}$  происходит растяжение/сжатие, в то время как в направлении осей  $y_{obj}$ ,  $z_{obj}$  деформаций не происходит. Таким образом, деформации элементарного куба (по аналогии с рисунком 2.7), заданные уравнением (2.8), можно описать следующей матрицей линейного преобразования:

$$A_b = \begin{pmatrix} \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| (1 + y_{obj}K) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Если профиль одновременно подвергается преобразованию (2.8) и изменению температуры, то деформации в любой его точке будут описываться композицией линейных преобразований  $A_t$  и  $A_b$ :

$$A = A_t \cdot A_b = \frac{1}{1 + \alpha \cdot \Delta T(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})} \begin{pmatrix} \left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| (1 + y_{obj}K) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Тензор деформаций в главных осях при этом будет иметь вид:

$$D = A - I \quad (2.23)$$

В действительности точки профиля имеют возможность перемещаться в плоскости его поперечного сечения (в направлении осей  $y_{obj}$  и  $z_{obj}$ ), что приводит к почти полной «релаксации» напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ . Правомерным упрощением, принятым в сопротивлении материалов, будет положить  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$ . Тогда в каждой точке профиля будет возникать одноосное напряженно-деформированное состояние, характеризующееся относительной деформацией в направлении оси  $x_{obj}$ :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| (1 + y_{obj}K)}{1 + \alpha \cdot \Delta T(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})} - 1 \quad (2.24)$$

Возникающие при этом напряжения будут иметь вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} E_p \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

где  $E_p$  – модуль упругости ПВХ.

Уравнения (2.24) и (2.25) позволяют рассчитывать внутренние напряжения в изогнутом профиле при произвольном характере температурного поля.

Зная распределение внутренних напряжений, возможно рассчитать значение внутренних усилий, действующих в поперечном сечении ПВХ профиля:

$$N = \iint \sigma_{xx} dA; \quad M_z = \iint \sigma_{xx} y_{obj} dA; \quad M_y = \iint \sigma_{xx} z_{obj} dA \quad (2.26)$$

Интегрирование проводится в системе координат  $Ox_{obj}y_{obj}z_{obj}$ , поскольку предполагается что деформации профиля малы и отклонение осей  $x_{obj}, y_{obj}, z_{obj}$  в деформированном состоянии от осей пространственной системы координат  $Oxuz$  пренебрежимо мало.

Далее зададимся конкретным видом функции  $T(x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})$ , соответствующим результатам анализа температурного поля в поперечном сечении армированного ПВХ профиля (рисунок 2.11):

$$T(y_{obj}) = \begin{cases} T_1 + \frac{T_2 - T_1}{y_2 - y_1} (y_{obj} - y_1) & \text{при } y_{obj} \in [y_1, y_2] \\ T_2 + \frac{T_3 - T_2}{y_3 - y_2} (y_{obj} - y_2) & \text{при } y_{obj} \in (y_2, y_3) \\ T_3 + \frac{T_4 - T_3}{y_4 - y_3} (y_{obj} - y_3) & \text{при } y_{obj} \in [y_4, y_3] \end{cases} \quad (2.27)$$

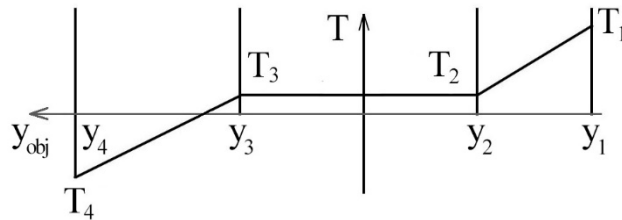


Рисунок 2.11 – Кусочно заданная функция температуры

Для того, чтобы получить более универсальные уравнения, в данный момент будем игнорировать тот факт, что для армированного ПВХ профиля  $T_3 = T_2$ . Результаты при  $T_3 \neq T_2$  могут быть использованы, например, для описания механической работы алюминиевых оконных профилей, поскольку и в их поперечном сечении действует нелинейное трехчастное температурное поле, описываемое функцией, показанной на рисунке 2.11 [8]. При этом функция внутренних напряжений также примет кусочно заданный вид:

$$\sigma_{xx}^i = E \left( \frac{\left| \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right| (1 + y_{obj} K)}{1 + \alpha \cdot (T_i + R^i (y_{obj} - y_i) - T_{ref})} - 1 \right) \text{ при } y_{obj} \in [y_i, y_{i+1}] \quad (2.28)$$

где  $R^i$  – градиент температуры на  $i$ -ом участке.

Функция (2.28), строго говоря, не является линейной, в виду чего её точное интегрирование затруднено. Между тем её исследование на конкретных примерах показало, что на участках сечения с постоянным градиентом температуры она является практически линейной. Данное обстоятельство объясняется рядом факторов: малым размером поперечного сечения ПВХ профиля в сравнении с радиусом его кривизны (для практически значимых случаев), малой величиной коэффициента линейного температурного расширения ПВХ, равной  $7 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  [21]. С

учётом данного наблюдения функция (2.28) может быть без значительной потери точности выражена в виде:

$$\sigma_{xx}^i(y_{obj}) = \sigma_{xx_i} + \frac{\sigma_{xx_{i+1}} - \sigma_{xx_i}}{y_{i+1} - y_i} (y_{obj} - y_i) \text{ при } y_{obj} \in [y_i, y_{i+1}] \quad (2.29)$$

где четыре величины  $\sigma_{xx_i}$  рассчитываются в соответствии с уравнением (2.25).

Уравнение (2.29) является линейным и может быть проинтегрировано для нахождения внутренних усилий. Пропустив промежуточные результаты и обозначив для более компактного

вида величину  $\left. \frac{d\bar{u}_{ax}}{dx_{obj}} \right|$  литерой  $k_{ax}$ , получаем:

$$\begin{aligned} N &= Ek_{ax} \left[ \sum (a^i A_i + b^i S_{zi}) + K \sum (d^i A_i + c^i S_{zi}) \right] - EA \\ M_z &= Ek_{ax} \left[ \sum (a^i S_{zi} + b^i I_{zi}) + K \sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi}) \right] - ES_z \\ a^i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1} - y_i}; \quad b^i = \frac{1 - 1}{y_{i+1} - y_i}; \quad c^i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1} - y_i} \\ d^i &= -y_{i+1} y_i b^i \\ \omega_i &= 1 + \alpha(T_i - T_{ref}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $I_{zi}$ ,  $S_{zi}$ ,  $A_i$  – момент инерции, статический момент и площадь  $i$ -й части поперечного сечения соответственно (статический момент и момент инерции определяются относительно общей оси);

Выразим величину  $k_{ax}$  из уравнения для  $N$ :

$$k_{ax} = \frac{\frac{N}{E} + A}{\sum (a^i A_i + b^i S_{zi}) + K \sum (d^i A_i + c^i S_{zi})} \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) позволяет сформулировать условие для определения положения нейтральной оси профиля. Продольная деформация нейтральной оси не может зависеть от радиуса кривизны  $K$  профиля, поскольку нейтральная ось проходит через точку поперечного сечения, в которой напряжения изгиба равны нулю. В выражении (2.31) величина  $k_{ax}$  не будет зависеть от  $K$  в случае выполнения следующего соотношения:

$$\sum (d^i A_i + c^i S_{zi}) = 0 \quad (2.32)$$

При помощи перехода из одной системы координат в другую, получаем:

$$y_{ax0} = \frac{\sum (d^i A_i + c^i S_{zi})}{\sum c^i A_i} \quad (2.33)$$

В дальнейшем будем рассматривать поперечное сечение в его главной системе координат. Перепишем выражение для  $k_{ax}$ :

$$k_{ax} = \frac{N}{E \sum (a^i A_i + b^i S_{zi})} + \frac{A}{\sum (a^i A_i + b^i S_{zi})} \quad (2.34)$$

При сопоставлении первого слагаемого в выражении (2.34) с классическим уравнением для определения величины продольной деформации стержня, можно сделать вывод, что величина  $\sum (a^i A_i + b^i S_{zi})$  является эквивалентом площади всего сечения:

$$A_{eq} = \sum (a^i A_i + b^i S_{zi}) \quad (2.35)$$

Второе слагаемое в выражении (2.34) соответствует начальному коэффициенту продольной деформации оси профиля (при  $N=0$ ):

$$k_{ax0} = \frac{A}{A_{eq}} \quad (2.36)$$

С учетом выражений (2.35) и (2.36), а также соотношения между коэффициентом деформации и относительной деформацией ( $\varepsilon = k - 1$ ) запишем:

$$\varepsilon_{ax} = \frac{N}{EA_{eq}} + \varepsilon_{ax0} \quad (2.37)$$

Далее выразим кривизну профиля  $K$  из уравнения для  $M_z$ :

$$K = \frac{M_z + ES_z}{Ek_{ax} \sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi})} - \frac{\sum (a^i S_{zi} + b^i I_{zi})}{\sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi})} \quad (2.38)$$

В практически значимых случаях величина  $k_{ax}$  будет пренебрежимо мало отлична от 1. Принимая это во внимание, можно записать окончательное выражение для  $K$ :

$$K = \frac{M_z}{E \sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi})} + \frac{S_z - \sum (a^i S_{zi} + b^i I_{zi})}{\sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi})} \quad (2.39)$$

Второе слагаемое в выражении (2.39) является начальной кривизной профиля (при  $M_z = 0$ ):

$$K_0 = \frac{S_z - \sum (a^i S_{zi} + b^i I_{zi})}{\sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi})} \quad (2.40)$$

При сопоставлении первого слагаемого в выражении (2.39) с классическим уравнением для определения кривизны стержня, можно сделать вывод, что величина  $\sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi})$  является эквивалентом момента инерции сечения профиля:

$$I_{eq} = \sum (d^i S_{zi} + c^i I_{zi}) \quad (2.41)$$

С учетом этого, запишем:

$$K = \frac{M_z}{EI_{eq}} + K_0 \quad (2.42)$$



Выражения (2.42) и (2.37) позволяют полностью описать напряженно-деформированное состояние ПВХ профиля при нелинейном трехчастном температурном поле, действующим в поперечном сечении профиля.

### 2.3 Расчет свободного температурного изгиба ПВХ профиля

Для верификации полученных в предыдущем разделе формул с их помощью было описано НДС ПВХ профиля рамы, изображенного на рисунке 2.2, при параметрах температурного поля, действующего в его поперечном сечении, показанных на рисунке 2.3, и результаты расчета были сопоставлены с результатами компьютерного моделирования.

Рассмотрим профиль в некой системе координат, которая на первом этапе может быть выбрана произвольно (рисунок 2.12). Сначала должно быть определено положение нейтральной оси профиля. Расчет положения нейтральной оси показан на рисунке 2.13. Здесь и далее все расчеты текущего раздела будут проводиться в табличном виде с использованием программы Excel.

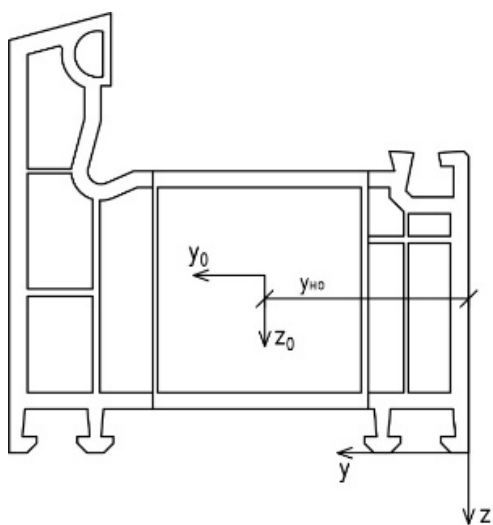


Рисунок 2.12 – К определению положения нейтральной оси

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Szi, cm <sup>3</sup>	Ai, cm <sup>2</sup>	Ti, degC	yi, cm	phi_i	ci	bi, 1/m	di, m	di*Ai+ci*Szi, m <sup>3</sup>	ci*Ai, m <sup>2</sup>
2	1,4972	2,6148	15,05	0	0,9996535	1,00151	0,076042927	0	1,49946E-06	0,000261875
3	6,7907	2,2034	-1,54	1,53	0,9984922	1,00151	0	0	6,80095E-06	0,000220673
4	26,319	4,2183	-1,54	4,81	0,9984922	1,005238	0,053249601	0,0001793	2,65325E-05	0,000424039
5			-18,13	7	0,9973309			сумма=	3,48329E-05	0,000906587
6										
7	alfa	0,00007	1/K							
8	Tref	20	degC							
9	y_но	38,422	mm							

Рисунок 2.13 - Расчет положения нейтральной оси профиля

Получаем,  $y_{но} = 38,422$  мм

Перемещаем ось  $y$  в новое положение  $y_0$ , после чего заново рассчитываем геометрические параметры поперечного сечения ПВХ профиля (рисунок 2.14).

	A	B	C
1	$I_{zi}, \text{cm}^4$	$S_{zi}, \text{cm}^3$	$A_i, \text{cm}^2$
2	28,561	-8,549	2,6148
3	4,157	-1,675	2,2034
4	25,809	10,111	4,2183

Рисунок 2.14 - Геометрические параметры сечения относительно нейтральной оси

Далее рассчитаем начальный коэффициент продольной деформации оси профиля (рисунок 2.15).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		$S_{zi}, \text{cm}^3$	$A_i, \text{cm}^2$	$T_i, \text{degC}$	$y_i, \text{cm}$	$\phi_{i_i}$	$a_i$	$b_i, 1/\text{cm}$	$a_i \cdot A_i + b_i \cdot S_{zi}, \text{cm}^2$
2		-8,549	2,6148	15,05	-3,842	0,999654	1,003268	0,00076	2,616845151
3		-1,675	2,2034	-1,54	-2,312	0,998492	1,00151	0	2,206727303
4		10,111	4,2183	-1,54	0,968	0,998492	1,000995	0,000532	4,227880128
5				-18,13	3,158	0,997331			
6	Сумма=	-0,113	9,0365						9,051452582
7		alfa=	0,00007	1/K					
8		Tref=	20	degC					
9		$k_{ax\_cb}$	0,998348046						

Рисунок 2.15 - Определение величины  $k_{ax}^{ce}$

Получаем,  $k_{ax0} = 0.998348$ . Данное значение действительно близко к единице, что оправдывает упрощение, сделанное при получении (2.39) формулы.

Далее рассчитаем начальную кривизну ПВХ профиля (рисунок 2.16).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	$I_{zi}, \text{cm}^4$	$S_{zi}, \text{cm}^3$	$A_i, \text{cm}^2$	$T_i, \text{degC}$	$y_i, \text{cm}$	$\phi_{i_i}$	$a_i$	$c_i$	$b_i, 1/\text{cm}$	$d_i, \text{cm}$	$d_i \cdot S_{zi} + c_i \cdot I_{zi}, \text{cm}^4$	$a_i \cdot S_{zi} + b_i \cdot I_{zi}, \text{cm}^3$
2	28,561	-8,549	2,6148	15,05	-3,842	0,999654	1,003268	0,998588	0,00076	-0,00676	28,57843568	-8,555222431
3	4,157	-1,675	2,2034	-1,54	-2,312	0,998492	1,00151	1,00151	0	0	4,16327739	-1,677529379
4	25,809	10,111	4,2183	-1,54	0,9678	0,998492	1,000995	1,003192	0,000532	-0,00163	25,87491747	10,13480088
5				-18,13	3,1578	0,997331						
6	Сумма=	-0,113	9,0365							сумма=	58,61663054	-0,097950933
7		alfa=	0,00007	1/K								
8		Tref=	20	degC								
9		$K_{cb}$	-0,02567	1/m								

Рисунок 2.16 – Определение величины  $K_{cb}$

Получаем,  $K_0 = -0,02567$  1/м. Кривизна является отрицательной, это означает, что при действии рассматриваемой температурной нагрузки профиль изгибается в сторону более теплого края (в направлении, противоположном направлению оси  $y$ ). Рассчитаем также кривизну ПВХ профиля по классической формуле, которая получена из предположения о линейном распределении температуры в поперечном сечении профиля. При разнице температур  $\Delta t = 15.05 - (-18.13) = 33.18^\circ\text{C}$ , ширине профиля 70 мм и коэффициенте линейного температурного расширения  $7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  получаем, что кривизна будет равна  $K_0 = (33.18/0.07) \cdot 7 \cdot 10^{-5} = -0.03318$  1/м. Данный результат на 29.3% отличается от полученного с помощью разработанной методики.

Теперь определим внутренние напряжения в профиле, используя формулу (2.25), отметим, что поскольку внешняя механическая нагрузка отсутствует, то  $k_{ax} = k_{ax0}$  и  $K = K_0$ . Результаты расчета показаны на рисунке 2.17.

	A	B	C
1	$\phi_i$	$y_i$ , cm	$\sigma_i$ , МПа
2	0,999654	-3,8422	-0,86655912
3	0,998492	-2,3122	1,212403326
4	0,998492	0,9678	-1,06060356
5	0,997331	3,1578	0,562647794
6	E=	2,70E+09 Pa	
7	$k_{ax}$ =	0,998348	
8	K=	-0,02567	1/m

Рисунок 2.17 - Определение внутренних напряжений

По результатам расчета может быть построена эпюра внутренних напряжений в поперечном сечении рассматриваемого ПВХ профиля. Она изображена на рисунке 2.18.

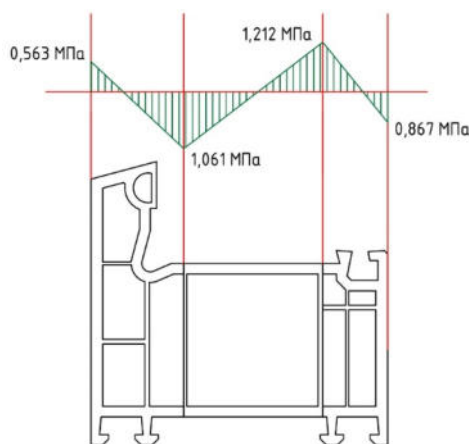


Рисунок 2.18 – Результат аналитического расчета

На рисунке 2.18 видно, что распределение нормальных напряжений в поперечном сечении профиля при рассматриваемой нелинейной температурной нагрузке действительно отличается от результатов расчета по классическим уравнениям сопротивления материалов: в классическом случае при отсутствии внешней механической нагрузки в поперечном сечении статически определимого балочного элемента при температурном воздействии не будут возникать напряжения.

На следующем этапе в программном комплексе COMSOL Multiphysics® была поставлена задача, аналогичная описанной выше: в поперечном сечении ПВХ профиля длиной 1 м было установлено поле температур, соответствующее рисунку 2.3 (см. рисунок 2.19), после чего были рассчитаны деформации и внутренние напряжения, возникающие в профиле при его свободном изгибе под действием этой температурной нагрузки.

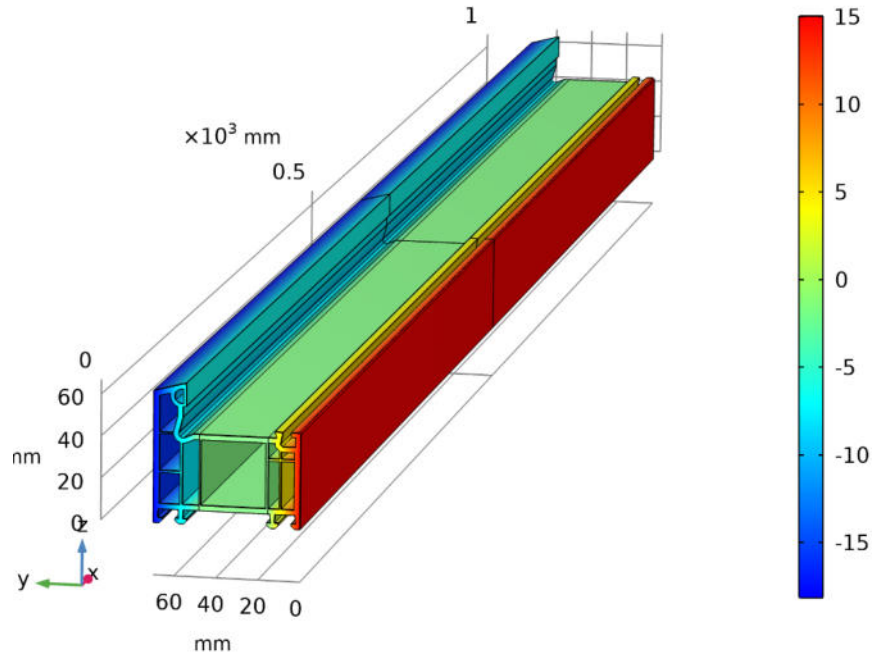


Рисунок 2.19 – Трехмерная модель ПВХ профиля в программе COMSOL и заданное распределение температуры (°C)

На рисунке 2.20 изображен график нормальных напряжений в поперечном сечении ПВХ профиля, полученный по результатам расчета в COMSOL. Для более удобного сравнения результатов моделирования с результатом аналитического расчета, на рисунке 2.21 изображена эпюра продольных напряжений вдоль линии А-А, обозначенной на рисунке 2.20.

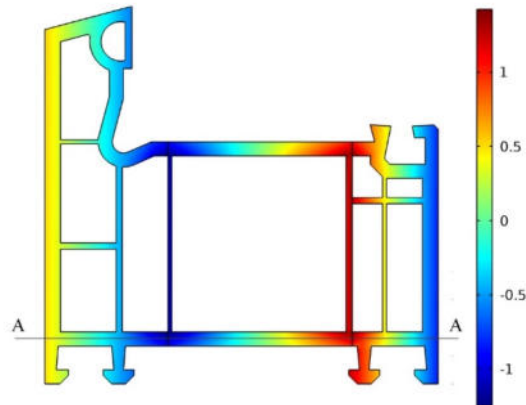


Рисунок 2.20 – Результаты расчета в COMSOL. Нормальные напряжения в поперечном сечении профиля, МПа

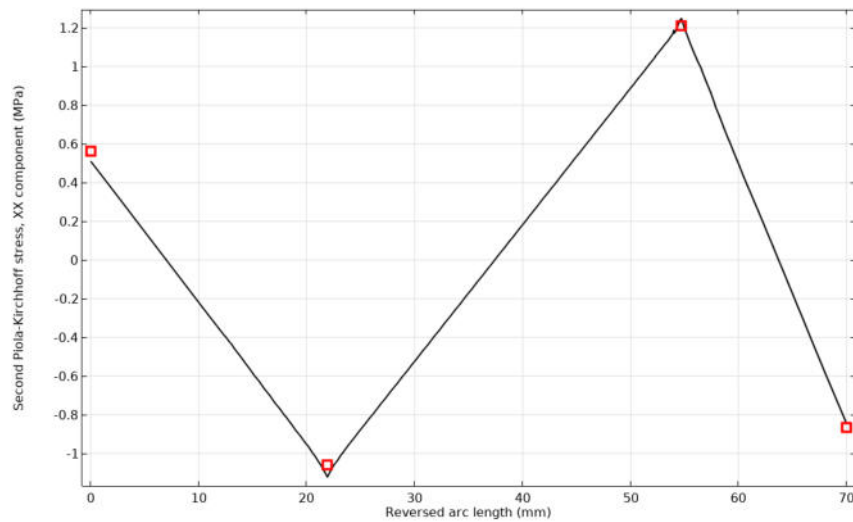


Рисунок 2.21 – Нормальные напряжения вдоль линии А-А, МПа. Черной линией показан результат расчета в COMSOL, красными квадратами – результат аналитического расчета.

На рисунке 2.21 видно, что эпюра нормальных напряжений, полученная по результатам численного расчета, совпадает результатам, полученным путем аналитического расчета по разработанным уравнениям.

#### 2.4 Напряженно-деформированное состояние оконного профиля ПВХ и стального сердечника при климатических температурных воздействиях

В зимних условиях эксплуатации по разные стороны окна возникает перепад температур, вследствие этого профильные элементы окна претерпевают изгиб в сторону теплого помещения. Наличие армирующего сердечника существенно влияет на характер деформирования оконного профиля ПВХ при температурной нагрузке. ПВХ профиль соединяется с сердечником посредством саморезов, количество и шаг саморезов может отличаться в зависимости от длины профиля. Как уже было выяснено, температурное поле, возникающее в поперечном сечении стального сердечника, является практически однородным (ввиду большого значения коэффициента теплопроводности стали). Это означает, что сердечник испытывает только продольные температурные деформации и остается прямым, в то время как ПВХ профиль стремится изогнуться. Усилия, возникающие в точках соединения профиля и сердечника будут иметь как продольные, так и поперечные компоненты (рисунок 2.22). Поперечные компоненты обусловлены стремлением ПВХ профиля изогнуться, они компенсируют этот изгиб. Продольные компоненты обусловлены разницей в продольных температурных деформациях профиля и сердечника.

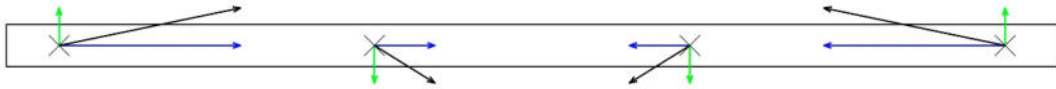


Рисунок 2.22 – Усилия, передаваемые с ПВХ профиля на армирующий сердечник (при 4-х точках закрепления).

Для описания механической работы армированного ПВХ профиля будем использовать расчетную схему, изображенную на рисунке 2.23. На ней показан ПВХ профиль и стальной сердечник, на которые действуют моменты ( $M$  и  $M'$ ), поперечные силы ( $R$ ) и продольные силы ( $H$ ), возникающие в точках крепления саморезами. На ПВХ профиль действуют также внешние сосредоточенные силы ( $P$ ). Моменты в точках крепления ПВХ профиля с сердечником могут появиться в тех случаях, когда крепление реализовано таким образом, что объединяется не только перемещение профилей, но и их поворот (например, при двух близко расположенных саморезах, или иных способах соединения стального сердечника с ПВХ профилем, отличных от стандартного), а также в результате воздействия температурной нагрузки (это будет пояснено далее). Сразу оговоримся, что за положительное направление внешних сил принимается направление параллельное оси  $y$  (или оси  $u$  – оси перемещения вдоль координаты  $y$ ), а за положительное направление внешних моментов принимается направление параллельное оси  $z$  (т.е. при взгляде на рисунок 5.23 положительными считаются моменты направленные против часовой стрелки)

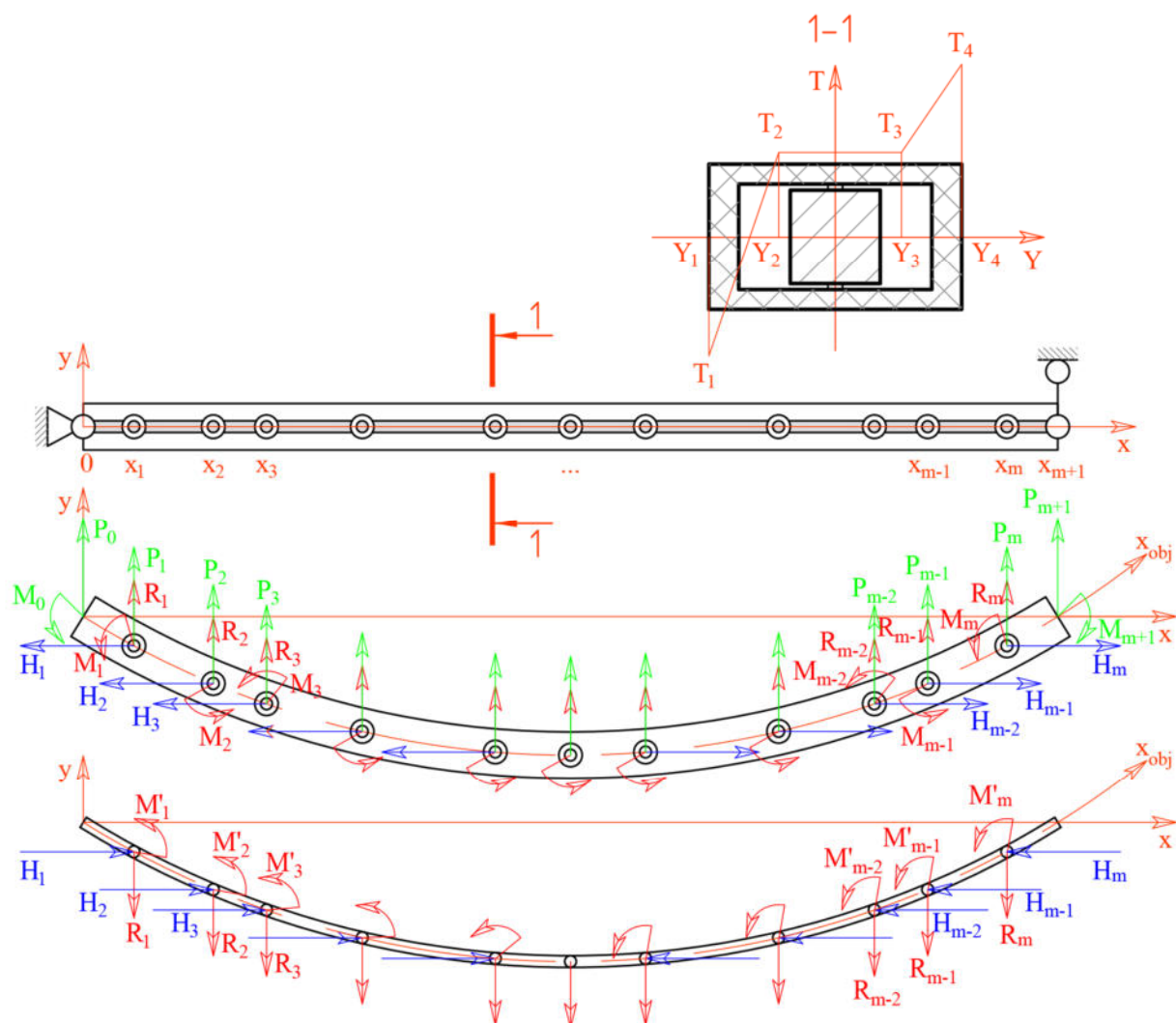


Рисунок 2.23 – Расчётная схема для описания совместной механической работы ПВХ профиля и армирующего сердечника

### 2.4.1 Расчет значений продольных сил реакции, возникающих в местах крепления ПВХ профиля и сердечника

Предположим, что профиль и армирующий сердечник испытывают только продольные температурные деформации. Решение будем искать в общем виде (рисунок 2.24): пусть ПВХ профиль имеет произвольную длину и соединен с армирующим сердечником с помощью  $m$  креплений (расстояния между креплениями тоже могут быть произвольными). Каждое крепление имеет две точки: одну, относящуюся к сердечнику (координату этой точки будем обозначать заглавной буквой « $X$ »), другую – к ПВХ профилю (координату этой точки будем обозначать строчной буквой « $x$ »). Изначально в каждом креплении координаты  $X$  и  $x$  совпадают:  $X_i = x_i$ .



Рисунок 2.24 – Расчетная схема для определения продольных усилий в точках крепления

В результате температурных нагрузок и действия самих продольных сил точки крепления изменяют свои положения (из  $x$  в  $x'$ , из  $X$  в  $X'$ ). ПВХ имеет больший коэффициент линейного температурного расширения, чем сталь, поэтому при охлаждении ПВХ профиль «усаживается» значительно больше, чем сердечник. Свободной усадке ПВХ профиля препятствуют усилия, возникающие в точках закрепления, при этом ПВХ профиль испытывает растяжение, а сердечник – сжатие. В силу предполагаемой податливости крепления точки  $X'$  и  $x'$ , относящиеся к одному креплению, могут смещаться друг относительно друга, а возникающее между ними усилие будет



определено формулой:  $H_{ix} = \xi_{xi} \cdot (X'_i - x'_i)$ , где  $\xi_{xi}$  - продольная жесткость  $i$ -ой точки крепления (Н/м). Описанные выше условия математически выражаются следующей системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_{i+1} - x'_i - \frac{N_i^{i+1}}{E_p A_{eq}} (x_{i+1} - x_i) = k_{ax0} (x_{i+1} - x_i), \text{ при } i \in [1, m-1] \\ X'_{i+1} - X'_i + \frac{N_i^{i+1}}{E_s A_s} (x_{i+1} - x_i) = (\alpha_s (\tau_2 - T_{ref}) + 1) (x_{i+1} - x_i), \text{ при } i \in [1, m-1] \\ -N_1^2 - \xi_{x1} (X'_1 - x'_1) = 0 \\ N_{i-1}^i - N_i^{i+1} - \xi_{xi} (X'_i - x'_i) = 0 \text{ при } i \in [2, m-1] \\ N_{m-1}^m - \xi_{xm} (X'_m - x'_m) = 0 \\ x'_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

где  $N_i^{i+1}$  — это внутреннее продольное усилие в ПВХ профиле, действующее между  $i$ -ой и  $i+1$ -ой точками крепления. Величины  $N_i^{i+1}$ ,  $x'$  и  $X'$  являются неизвестными. Система уравнений (2.43) является линейной и замкнутой, а значит, может быть легко решена матричным методом.

При рассмотрении конкретных задач и сравнении результатов расчета с результатами трехмерного конечно-элементного моделирования было определено значение продольной жесткости узлов соединения ПВХ профиля с армирующим сердечником  $\xi_x = 3.4 \cdot 10^6$  Н/м (его можно устанавливать одинаковым для всех точек крепления, за исключением некоторых случаев, описанных в последующих разделах). Данные значения  $\xi_x$  обеспечивают наилучшую сходимость аналитических расчетов с результатами моделирования. При этом нужно отметить, что значение  $\xi_x$  на самом деле не постоянно, оно уменьшается с ростом возникающего в узле крепления усилия. Данный факт мог бы быть учтен в расчетах, но это приведет к дополнительным сложностям.

По значениям внутренних осевых усилий  $N$ , определенных при решении системы (2.43), могут быть найдены продольные компоненты сил реакций в точках крепления ПВХ профиля к сердечнику (следующие уравнения дают именно усилия, действующие со стороны сердечника на профиль, а не со стороны профиля на сердечник, при этом положительный знак  $H$  означает, что сила направлена в положительном направлении оси  $x$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = -N_1^2 \\ H_i = N_{i-1}^i - N_i^{i+1} \text{ при } i \in [2, m-1] \\ H_m = N_{m-1}^m \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Продольные силы  $H$  могут иметь эксцентриситет относительно нейтральной оси ПВХ профиля и армирующего сердечника (рисунок 2.25). Это означает, что в точках крепления будет

возникать изгибающие моменты, действующие как на ПВХ профиль ( $M$ ), так и на стальной сердечник ( $M'$ ). Они определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_i &= -H_i \cdot (y_{sc} - y_{ax}^{pvc}) \\ M'_i &= H_i \cdot (y_{sc} - y_{ax}^{core}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

где  $y_{sc}$  – координата установки саморезов, м;  $y_{ax}^{pvc}$  – координата нейтральной оси ПВХ профиля, м;  $y_{ax}^{core}$  – координата нейтральной оси сердечника, м.

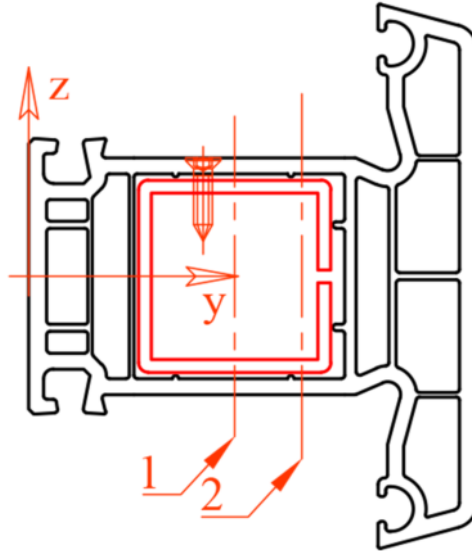


Рисунок 2.25 – Эксцентриситет точки крепления самореза: 1 – нейтральная ось армирующего сердечника, 2 – нейтральная ось ПВХ стержня

#### 2.4.2 Описание изгиба ПВХ профиля при климатических температурных воздействиях

Рассмотрим ПВХ профиль в промежутке между точками приложения нагрузки  $x_{j-1}$  и  $x_j$  при  $j \in [2, m]$ , где  $m$  – общее количество точек крепления сердечника к ПВХ профилю. Составим уравнение момента, действующего в поперечном сечении профиля на данном промежутке, при этом за положительное направление момента выберем направление против часовой стрелки:

$$M(x) = \sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k)(x - x_k) - \sum_{k=0}^{j-1} M_k + \sum_{k=0}^{j-1} H_k (u(x) - u(x_k)) \quad (2.46)$$

Далее составим уравнение кривизны осевой линии ПВХ профиля. Примем во внимание тот факт, что при малых деформациях, кривизна осевой линии равна второй производной функции прогибов по координате  $x$

$$K(x) = u''(x) = K_0 + \frac{M(x)}{E_P I_P} = K_0 + \frac{1}{E_P I_P} \sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k)(x - x_k) - \frac{1}{E_P I_P} \sum_{k=0}^{j-1} M_k + \frac{1}{E_P I_P} \sum_{k=0}^{j-1} H_k (u(x) - u(x_k)) \quad (2.47)$$

После преобразования уравнения (2.47), получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции прогиба:

$$u''(x) - \frac{u(x)}{E_P I_P} \sum_{k=0}^{j-1} H_k = \frac{1}{E_P I_P} \sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k)(x - x_k) - \frac{1}{E_P I_P} \sum_{k=0}^{j-1} M_k - \frac{1}{E_P I_P} \sum_{k=0}^{j-1} H_k u(x_k) + K_0 \quad (2.48)$$

Содержащееся в уравнении (2.48) слагаемое с  $u(x_k)$  должно рассматриваться, как обычная константа, поскольку точки  $x_k$  находятся за пределами области определения рассматриваемой функции  $u(x)$ . Полное решение уравнения (2.48) является суммой его общего решения в однородном виде и частного решения. При этом частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов. Полное решение будет иметь вид:

$$u(x) = C_1 e^{x\sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / E_P I_P}} + C_2 e^{-x\sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / E_P I_P}} - \frac{\sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k)(x - x_k)}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} + \frac{\sum_{k=0}^{j-1} M_k + \sum_{k=0}^{j-1} H_k u(x_k) - K_0 / G_P}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} \quad (2.49)$$

$$u'(x) = \sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / E_P I_P} \cdot C_1 e^{x\sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / E_P I_P}} - \sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / E_P I_P} \cdot C_2 e^{-x\sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / E_P I_P}} - \frac{\sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k)}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} \quad (2.50)$$

Определим значение констант интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , основываясь на значении функции  $u(x)$  и её производной в точке  $x_{j-1}$ :

$$u(x) = u(x_{j-1}) \cosh(\lambda_{pj}(x - x_{j-1})) + u'(x_{j-1}) \frac{\sinh(\lambda_{pj}(x - x_{j-1}))}{\lambda_{pj}} + \frac{\sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k) \left( [x_{j-1} - x_k] \cosh(\lambda_{pj}(x - x_{j-1})) + \frac{\sinh(\lambda_{pj}(x - x_{j-1}))}{\lambda_{pj}} - [x - x_k] \right)}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} - \frac{\sum_{k=0}^{j-1} M_k + \sum_{k=0}^{j-1} H_k u(x_k) - K_0 / G_P}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} (\cosh(\lambda_{pj}(x - x_{j-1})) - 1) \quad (2.51)$$

$$u'(x) = u(x_{j-1})\lambda_{pj} \sinh(\lambda_{pj}(x-x_{j-1})) + u'(x_{j-1})\cosh(\lambda_{pj}(x-x_{j-1})) + \frac{\sum_{k=0}^{j-1}(R_k + P_k)\left([x_{j-1} - x_k] \sinh(\lambda_{pj}(x-x_{j-1}))\lambda_{pj} + \cosh(\lambda_{pj}(x-x_{j-1})) - 1\right)}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} - \frac{\sum_{k=0}^{j-1} M_k + \sum_{k=0}^{j-1} H_k u(x_k) - K_0/G_P}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} \cdot \sinh(\lambda_{pj}(x-x_{j-1}))\lambda_{pj} \quad (2.52)$$

$$\lambda_{pj} = \sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / E_P I_P} \quad (2.53)$$

Теперь определим, чему равно значение функции  $u(x)$  и её производной в точке  $x_j$ :

$$u(x_j) = u(x_{j-1})\cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) + u'(x_{j-1})\frac{\sinh(\lambda_{pj}\Delta_j)}{\lambda_{pj}} + \frac{\sum_{k=0}^{j-1}(R_k + P_k)\left([x_{j-1} - x_k] \cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) + \frac{\sinh(\lambda_{pj}\Delta_j)}{\lambda_{pj}} - [x_j - x_k]\right)}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} - \frac{\sum_{k=0}^{j-1} M_k + \sum_{k=0}^{j-1} H_k u(x_k) - K_0/G_P}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} (\cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) - 1) \quad (2.54)$$

$$u'(x_j) = u(x_{j-1})\lambda_{pj} \sinh(\lambda_{pj}\Delta_j) + u'(x_{j-1})\cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) + \frac{\sum_{k=0}^{j-1}(R_k + P_k)\left([x_{j-1} - x_k] \sinh(\lambda_{pj}\Delta_j)\lambda_{pj} + \cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) - 1\right)}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} - \frac{\sum_{k=0}^{j-1} M_k + \sum_{k=0}^{j-1} H_k u(x_k) - K_0/G_P}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} \cdot \sinh(\lambda_{pj}\Delta_j)\lambda_{pj} \quad (2.55)$$

$$\Delta_j = x_j - x_{j-1} \quad (2.56)$$

Уравнения (2.54) и (2.55) являются линейными относительно величин  $u(x_k)$ ,  $u'(x_k)$  и  $R_k$ , которые в рассматриваемой задаче являются неизвестными. Отметим, что в общем случае и значение внешних сил  $P_k$  также могут быть неизвестными. Перепишем уравнения (2.54) и (2.55) относительно  $u(x_k)$ ,  $u'(x_k)$ ,  $R_k$  и  $P_k$ , выделив эти слагаемые в правой части:

$$\frac{\sum_{k=0}^{j-1} M_k - K_0/G_P}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} (\cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) - 1) = -\sum_{k=0}^{j-1} \xi_{pj k} u(x_k) + u(x_{j-1})\alpha_{pj} - u(x_j) + u'(x_{j-1})\beta_{pj} + \sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k)\gamma_{pj k} \quad (2.57)$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{j-1} M_k - K_0/G_P}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} \cdot \sinh(\lambda_{pj}\Delta_j)\lambda_{pj} = -\sum_{k=0}^{j-1} \xi'_{pj k} u(x_k) + u(x_{j-1})\alpha'_{pj} - u'(x_j) + u'(x_{j-1})\beta'_{pj} + \sum_{k=0}^{j-1} (R_k + P_k)\gamma'_{pj k} \quad (2.58)$$

$$\alpha_{pj} = \cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) \quad (2.59)$$

$$\alpha'_{pj} = \lambda_{pj} \sinh(\lambda_{pj}\Delta_j) \quad (2.60)$$

$$\beta_{pj} = \frac{\alpha'_{pj}}{\lambda_{pj}^2} \quad (2.61)$$

$$\beta'_{pj} = \alpha_{pj} \quad (2.62)$$

$$\gamma_{pj} = \frac{[x_{j-1} - x_k] \cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) + \frac{\sinh(\lambda_{pj}\Delta_j)}{\lambda_{pj}} - [x_j - x_k]}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} \quad (2.63)$$

$$\gamma'_{pj} = \frac{[x_{j-1} - x_k] \sinh(\lambda_{pj}\Delta_j) \lambda_{pj} + \cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) - 1}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} \quad (2.64)$$

$$\xi_{pj} = \frac{H_k}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} (\cosh(\lambda_{pj}\Delta_j) - 1) \quad (2.65)$$

$$\xi'_{pj} = \frac{H_k}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} \sinh(\lambda_{pj}\Delta_j) \lambda_{pj} \quad (2.66)$$

Для точки  $x_l$  уравнения (2.57) и (2.58) использованы быть не могут, поскольку в промежутке  $x \in [0, x_l]$  отсутствуют продольные усилия. Уравнение прогиба и поворота для данной точки могут быть получены из уравнения (2.48), полагая в нем  $\sum H_k = 0$ :

$$\frac{M_0 x_1^2}{2G_p} - K_0 \frac{x_1^2}{2} = u(0) - u(x_1) + u'(0)x_1 + \frac{P_0 x_1^3}{6G_p} \quad (2.67)$$

$$\frac{M_0 x_1}{G_p} - K_0 x_1 = u'(0) - u'(x_1) + \frac{P_0 x_1^2}{2G_p} \quad (2.68)$$

Перемещение и угол поворота в точке  $x_{m+1}$  можно получить по аналогичным формулам, поскольку и на участке  $x \in [x_m, x_{m+1}]$  внутренние продольные усилия также равны нулю (при этом можно учесть инвариантность расчетной схемы относительно отражения по оси  $u$ ):

$$\frac{M_{m+1} \Delta_{m+1}^2}{2G_p} - K_0 \frac{\Delta_{m+1}^2}{2} = u(x_{m+1}) - u(x_m) - u'(x_{m+1}) \Delta_{m+1} - \frac{P_{m+1} \Delta_{m+1}^3}{6G_p} \quad (2.69)$$

$$-\frac{M_{m+1} \Delta_{m+1}}{G_p} + K_0 \Delta_{m+1} = u'(x_{m+1}) - u'(x_m) + \frac{P_{m+1} \Delta_{m+1}^2}{2G_p} \quad (2.70)$$

### 2.4.3 Описание изгиба армирующего сердечника при климатических температурных воздействиях

Таким же способом, который был описан в предыдущем разделе, были получены выражения для прогиба и поворота оси армирующего сердечника:

$$\frac{\sum_{k=0}^{j-1} M'_k}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} (\cos(\lambda_{sj} \Delta_j) - 1) = -\sum_{k=0}^{j-1} \xi_{sjk} u(x_k) + u(x_{j-1}) \alpha_{sj} - u(x_j) + u'(x_{j-1}) \beta_{sj} + \sum_{k=0}^{j-1} R_k \gamma_{sjk} \quad (2.71)$$

$$-\frac{\sum_{k=0}^{j-1} M'_k}{\sum_{k=0}^{j-1} H_k} \sin(\lambda_{sj} \Delta_j) \lambda_{sj} = -\sum_{k=0}^{j-1} \xi'_{sjk} u(x_k) + u(x_{j-1}) \alpha'_{sj} - u'(x_j) + u'(x_{j-1}) \beta'_{sj} + \sum_{k=0}^{j-1} R_k \gamma'_{sjk} \quad (2.72)$$

$$\alpha_{sj} = \cos(\lambda_{sj} \Delta_j) \quad (2.73)$$

$$\alpha'_{sj} = -\lambda_{sj} \sin(\lambda_{sj} \Delta_j) \quad (2.74)$$

$$\beta_{sj} = -\frac{\alpha'_{sj}}{\lambda_{sj}^2} \quad (2.75)$$

$$\beta'_{sj} = \alpha_{sj} \quad (2.76)$$

$$\gamma_{sjk} = \frac{[x_{j-1} - x_k] \cos(\lambda_{sj} \Delta_j) + \frac{\sin(\lambda_{sj} \Delta_j)}{\lambda_{sj}} - x_j + x_k}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} \quad (2.77)$$

$$\gamma'_{sjk} = \frac{-\lambda_{sj} [x_{j-1} - x_k] \sin(\lambda_{sj} \Delta_j) + \cos(\lambda_{sj} \Delta_j) - 1}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} \quad (2.78)$$

$$\xi_{sjk} = \frac{H_k}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} (\cos(\lambda_{sj} \Delta_j) - 1) \quad (2.79)$$

$$\xi'_{sjk} = -\frac{H_k}{\sum_{n=0}^{j-1} H_n} \sin(\lambda_{sj} \Delta_j) \lambda_{sj} \quad (2.80)$$

$$\lambda_{sj} = \sqrt{\sum_{k=0}^{j-1} H_k / G_s}; \quad G_s = E_s I_s; \quad \Delta_j = x_j - x_{j-1} \quad (2.81)$$

где  $I_s$  – момент инерции армирующего сердечника.

#### 2.4.4 Сбор общей матрицы системы уравнений

Уравнения, определяющие прогиб и поворот осей ПВХ профиля и армирующего сердечника, записанные для каждой из  $m$  точек крепления ПВХ профиля к сердечнику, образуют систему линейных алгебраических уравнений (далее – СЛАУ). Решение данной системы с привлечением дополнительных условий позволит полностью описать НДС системы «ПВХ профиль – сердечник». В качестве дополнительных условий должны выступать, в первую очередь, условия для нахождения усилий  $R$ , которые могут быть выражены уравнением (2.82) либо (2.83).

$$R(x_j) = 0 \quad (2.82)$$

$$u_{pvc}(x_j) - u_{core}(x_j) = 0 \quad (2.83)$$

Уравнение (2.83) должно применяться в случае, когда точка  $x_j$  является точкой соединения ПВХ профиля и стального сердечника. Если точка  $x_j$  не является точкой крепления, то должно использоваться уравнение (2.82), что позволит рассчитывать НДС армированного ПВХ профиля при произвольном положении внешней нагрузки  $P$ .

Во-вторых, должны быть использованы четыре уравнения равновесия: 2 для ПВХ профиля, 2 для армирующего сердечника.

В-третьих, должны быть использованы условия для определения внешних сил  $P$ . В наиболее простом случае силы  $P$  могут быть заданы изначально, тогда используется уравнение (2.84). Если силы  $P$  являются силами реакции в точках крепления ПВХ профиля к опоре или другим элементам конструкции, то они должны определяться из уравнений, соответствующим условиям крепления.

$$P(x_j) = P_j \quad (2.84)$$

Поскольку в настоящей работе рассматривается температурный прогиб без внешней механической нагрузки, далее по настоящему разделу неизвестные значения  $P$  будут опущены.

В результате записи всех необходимых выражений, входящих в общую СЛАУ рассматриваемой задачи, может быть составлена матрица  $A$  из коэффициентов, стоящих в системе уравнений при неизвестных величинах. При чистом температурном изгибе данная матрица будет состоять из 4-х частей. Пример матрицы  $A$  для симметричного ПВХ профиля, армированного стальным сердечником с 5-ью точками крепления между ними показан на рисунке 2.26.

$u_{p1}$	$u_{p2}$	$u_{p3}$	$u'_{p1}$	$u'_{p2}$	$u'_{p3}$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$u_{s1}$	$u_{s2}$	$u_{s3}$	$u'_{s1}$	$u'_{s2}$	$u'_{s3}$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\xi_{p2,1} + \alpha_{p2}$	-1	0	$\beta_{p2}$	0	0	$\gamma_{p2,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\xi_{p3,1}$	$-\xi_{p3,2} + \alpha_{p3}$	-1	0	$\beta_{p3}$	0	$\gamma_{p3,1}$	$\gamma_{p3,2}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\xi_{p'2,1} + \alpha_{p'2}$	0	0	$\beta_{p'2}$	-1	0	$\gamma_{p'2,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\xi_{p'3,1}$	$-\xi_{p'3,2} + \alpha_{p'3}$	0	0	$\beta_{p'3}$	-1	$\gamma_{p'3,1}$	$\gamma_{p'3,2}$	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	$\gamma_{s2,1}$	0	0	$-\xi_{s2,1} + \alpha_{s2}$	-1	0	$\beta_{s2}$	0	0
0	0	0	0	0	0	$\gamma_{s3,1}$	$\gamma_{s3,2}$	0	$-\xi_{s3,1}$	$-\xi_{s3,2} + \alpha_{s3}$	-1	0	$\beta_{s3}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	$\gamma_{s'2,1}$	0	0	$-\xi_{s'2,1} + \alpha_{s'2}$	0	0	$\beta_{s'2}$	-1	0
0	0	0	0	0	0	$\gamma_{s'3,1}$	$\gamma_{s'3,2}$	0	$-\xi_{s'3,1}$	$-\xi_{s'3,2} + \alpha_{s'3}$	0	0	$\beta_{s'3}$	-1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0

матрица ПВХ профиля       матрица уравнений равновесия  
 матрица армирующего сердечника       матрица условий для определения R

Рисунок 2.26 – Матрица для решения СЛАУ, описывающей чистый температурный изгиб армированного ПВХ профиля

### 2.5 Решение тестовой задачи

Для верификации описанного метода расчета НДС армированного ПВХ профиля с его помощью была решена тестовая задача об изгибе импоста системы Veka SoftLine 70 длиной 1657 мм с 7-ю точками крепления к стальному сердечнику (рисунок 2.27). Результаты аналитического расчета были сопоставлены с результатами компьютерного моделирования.

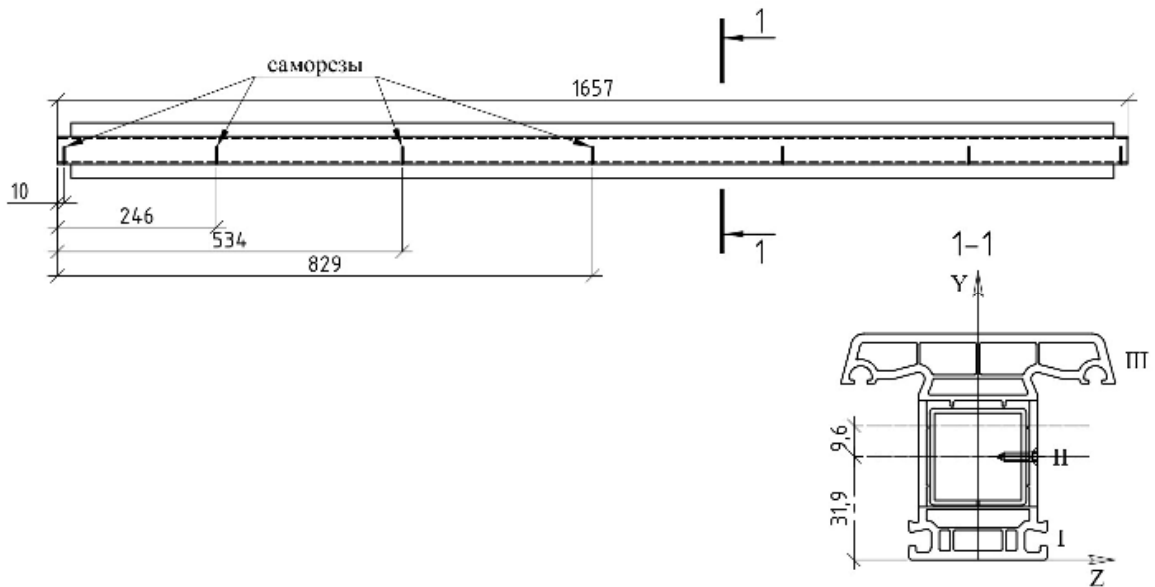


Рисунок 2.27 – Импост окна Veka SL70



В первую очередь были определены параметры температурного поля, действующего в поперечном сечении импоста, далее были найдены начальная кривизна оси импоста ( $K_0$ ) и начальный коэффициент продольной деформации ( $k_{ax0}$ ). Данные, необходимые для проведения этих расчетов приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Исходные данные для определения параметров свободной температурной деформации ПВХ профиля

Обозначение	Описание	Значение	Ед. измерения
$R_0$	Общее термическое сопротивление ПВХ профиля	0.74	$\text{м}^2 \cdot \text{°C} / \text{Вт}$
$\alpha_{\text{в}}$	Коэффициент теплового восприятия	8.7	$\text{Вт} / \text{м}^2 / \text{°C}$
$\alpha_{\text{н}}$	Коэффициент теплоотдачи	23	$\text{Вт} / \text{м}^2 / \text{°C}$
$T_{\text{in}}$	Расчётная температура внутреннего воздуха	+20	$\text{°C}$
$T_{\text{ex}}$	Расчётная температура наружного воздуха	-25	$\text{°C}$
$A$	Площадь всего сечения ПВХ профиля	10.14	$\text{см}^2$
$A^{\text{I}}, A^{\text{II}}, A^{\text{III}}$	Площади участков сечения I, II и III	2.79; 1.66; 5.69	$\text{см}^2$
$S_z^{\text{I}}, S_z^{\text{II}}, S_z^{\text{III}}$	Статический момент участков сечения I, II и III отн. нейтральной оси сечения ПВХ	-9.77; -1.44; 11.28	$\text{см}^3$
$I_z^{\text{I}}, I_z^{\text{II}}, I_z^{\text{III}}$	Момент инерции участков сечения I, II и III отн. нейтральной оси сечения ПВХ	35.02; 2.75; 24.94	$\text{см}^4$
$\alpha_{\text{рвс}}$	Коэффициент линейного температурного расширения ПВХ	$7 \cdot 10^{-5}$	$1 / \text{°C}$
$T_{\text{ref}}$	Начальное значение температуры	20	$\text{°C}$
$A_s$	Площадь сечения стального сердечника	1.6832	$\text{см}^2$

Было определено (по формулам (2.40) и (2.36)):  $K_0 = -0.0296$  1/м,  $k_{ax0} = 0.998092353$ , а также определено температурное поле в поперечном сечении импоста (рисунок 2.28).

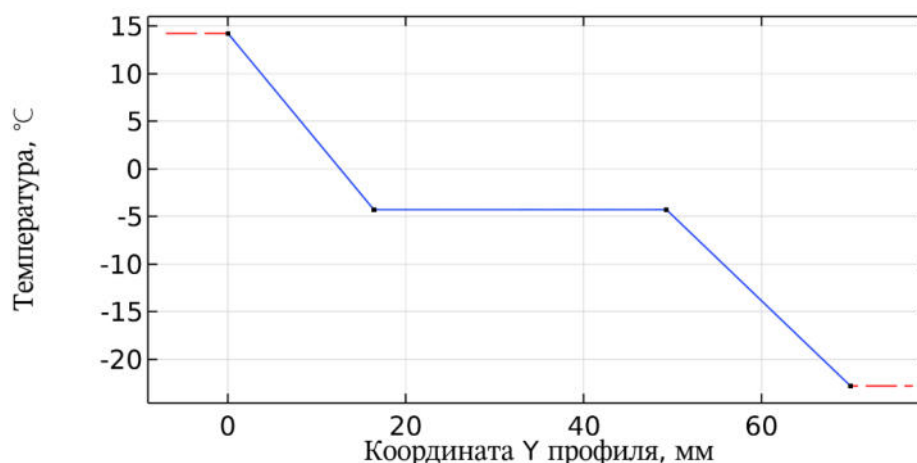


Рисунок 2.28 – Температурное поле, действующее в поперечном сечении импоста

На следующем этапе для 7-ми точек крепления была решена система уравнений (2.43), в результате чего были определены значения продольных компонентов усилий (таблица 2.2), передающих с армирующего сердечника на ПВХ профиль. При этом коэффициент продольной податливости узла соединения «ПВХ-сердечник» был принят  $\xi_x = 3.4 \cdot 10^6$  Н/м, коэффициент линейного температурного расширения стали  $\alpha_s = 1.23 \cdot 10^{-5}$  °C<sup>-1</sup>.

Таблица 2.2. Продольные компоненты сил реакции в точках крепления

№ точки крепления	H , Н
1	1700
2	950
3	402
4 (центр)	0
5	402
6	950
7	1700

Далее была составлена матрица  $A$ , соответствующая рассматриваемой задаче, способ получения которой описан в разделе 2.4.4 (рисунок 2.29). При этом был учтен эксцентриситет точек расположения саморезов относительно нейтральной оси ПВХ профиля  $e_2 = 9.6$  мм ( $e_1 = 0$ ). Соответствующий матрице  $A$  вектор свободных коэффициентов  $B$  показан на рисунке 2.30.

The matrix A is a 25x25 matrix. The first row is all zeros. The second row starts with 1, followed by zeros. The third row has 1, -1, 0. The fourth row has 0, 1, -1, 0, 0, 0, 238.202, 0, 0, 0, 0.001, -0.001, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. The fifth row has 0, -0.042, 1.042, -1, 0, 0, 0, 294.262, 0, 0, 0.008, 0.008, 0.002, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. The sixth row has 0, -0.044, -0.025, 1.069, -1, 0, 0, 0, 302.761, 0, 0.016, 0.016, 0.01, 0.003, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. The seventh row has 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. The eighth row has 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. The ninth row has 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.028, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. The tenth row has 0, -2.95·10<sup>-4</sup>, 2.95·10<sup>-4</sup>, 0. The eleventh row has 0, -3.035·10<sup>-4</sup>, -1.696·10<sup>-4</sup>, 4.731·10<sup>-4</sup>, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0. The twelfth row has 0, 0. The thirteenth row has 0, 0. The fourteenth row has 0, 0. The fifteenth row has 0, 0. The sixteenth row has 0, 0. The seventeenth row has 0, 0. The eighteenth row has 0, 0. The nineteenth row has 0, 0. The twentieth row has 0, 0. The twenty-first row has 0, 0. The twenty-second row has 0, 0. The twenty-third row has 0, 0. The twenty-fourth row has 0, 0. The twenty-fifth row has 0, 0.

Рисунок 2.29 – Матрица 25x25, соответствующая рассматриваемой задаче

$$B^T = [0 \ 0.001 \ 1.097 \ 1.87 \ 2.067 \ 0 \ 2.96 \cdot 10^{-4} \ 0.009 \ 0.013 \ 0.014 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Рисунок 2.30 – Вектор свободных коэффициентов, соответствующий рассматриваемой задаче

При решении составленной СЛАУ было определено напряженно-деформированное состояние импоста, в т.ч. и перемещение центральной точки импоста. Оно составило 4.275 мм (рисунок 2.31).

$$x^T = [0 \ 0.118 \ 2.13 \ 3.719 \ 4.275 \ 0.012 \ 0.012 \ 0.007 \ 0.004 \ 0 \ 0 \ 252.74 \ -299.94 \ 61.129 \ -27.857 \ 0.028 \ 0.118 \ 2.13 \ 3.719 \ 4.275 \ 0.009 \ 0.009 \ 0.007 \ 0.004 \ 0]$$

Рисунок 2.31 – Вектор неизвестных величин, найденный при решении основной системы уравнений (включает перемещение в центральной точке)

Далее в программном комплексе COMSOL Multiphysics® был смоделирован изображенный на рисунке 2.27 профиль импоста со стальным сердечником внутри. В модели было установлено температурное поле, соответствующее рисунку 2.28. На торцевых гранях ПВХ профиля были использованы условия Rigid Connector в постановке Flexible [95] с запретом на перемещения вдоль трех осей для одного конца и вдоль двух поперечных осей для другого конца профиля, а также с запретом на вращение вокруг продольной оси. Были заданы шарнирные условия взаимодействия между ПВХ профилем и армирующим сердечником в точках расположения саморезов, имитирующие реальную механическую работу крепежных элементов (при помощи Cylindrical Joint интерфейса Multibody Dynamics [93] с запретом на перемещение по оси шарнира). Результат расчета деформаций модели показан на рисунке 2.32.

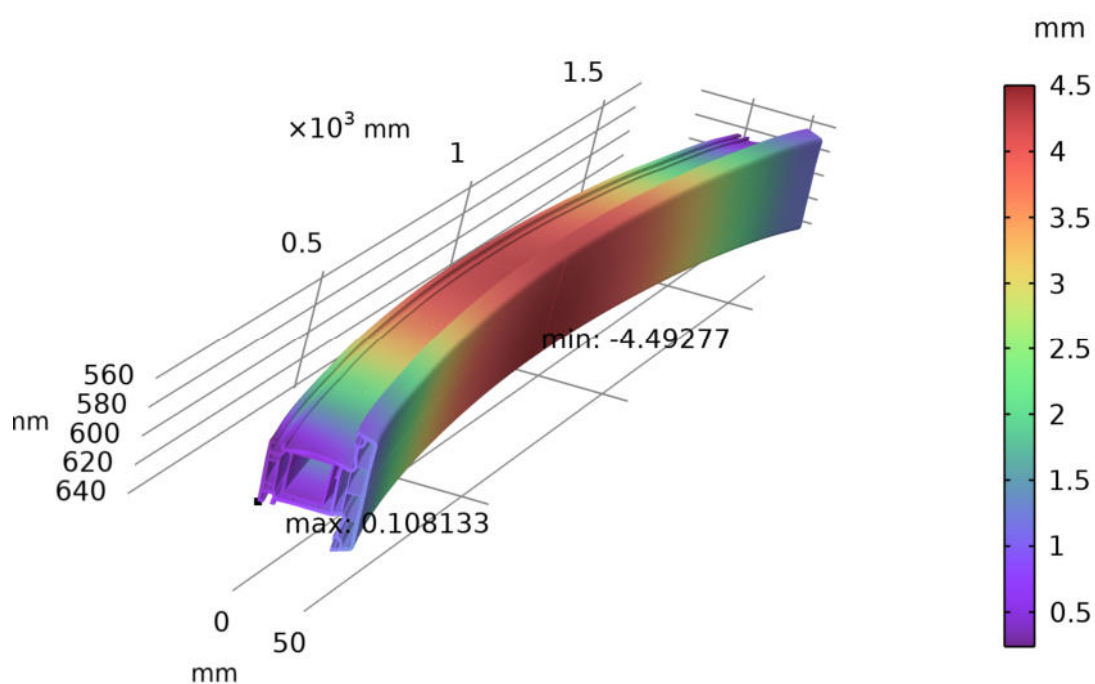


Рисунок 2.32 – Деформированная схема армированного ПВХ импоста от действия температурной нагрузки.

Таким образом, по результатам компьютерного моделирования было получено значение прогиба профиля импоста, армированного стальным сердечником. Оно составило 4.439 мм, что на 4.8% отличается от результата (4.275 мм), полученного по разработанной аналитической методике расчета.

## 2.6 Анализ влияния физической нелинейности ПВХ на напряженно-деформированное состояния оконных профилей ПВХ с армирующим стальным сердечником

Поливинилхлорид (ПВХ) — продукт полимеризации винилхлорида, исходным сырьем для производства которого является этилен и хлор. ПВХ отличается стойкостью к большинству химических реагентов (щелочам, минеральным маслам, многим кислотам и растворителям), имеет относительно низкую стоимость производства и обладает малой теплопроводностью. Эти качества сделали ПВХ материалом массового применения в производстве оконных конструкций. ПВХ по своему химическому составу относится к группе термопластов. Линейное строение молекул полимера и их малая связь друг с другом обуславливают сильную зависимость свойств ПВХ от температуры [2]. На рисунке 2.33 показана зависимость модуля упругости оконного ПВХ от температуры.

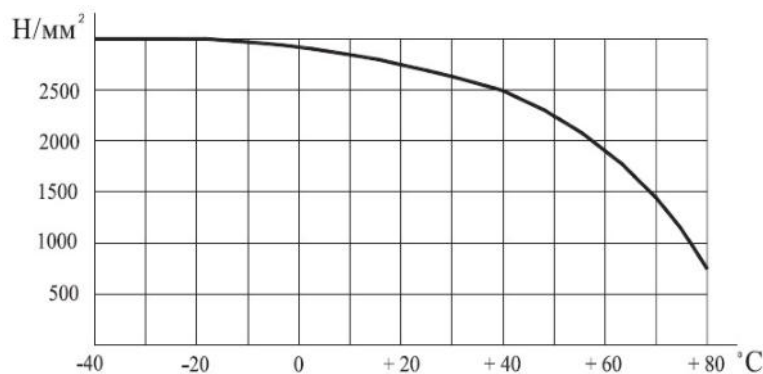


Рисунок 2.33 – Зависимость модуля упругости оконного ПВХ от температуры [2]

В лаборатории НИИ Строительной Физики были проведены испытания по определению реологических свойств оконного ПВХ при различных температурах. Результаты испытаний приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Механические характеристики оконного ПВХ

Температура испытаний, °C	Модуль упругости E, МПа	Предел текучести $\sigma_t$ , МПа	Деформация разрушения $\epsilon$ , %
22	2700	47	224
40	2500	37	246
- 35	3000	51	39

Для того, чтобы выяснить, каким образом физическая нелинейность ПВХ влияет на величину температурных деформаций оконного профиля, в программе COMSOL Multiphysics® была поставлена следующая задача: ПВХ профиль длиной 1060 мм имеет 4 точки крепления к армирующему сердечнику с шагом 300 мм (рисунок 2.34). Сечение профиля и сердечника было использовано то же, что и в предыдущих разделах. Профиль был закреплен с двух концов с

использованием граничного условия «Rigid Connector» в гибкой постановке (flexible type of connection) [95]. На одном конце были наложены связи на перемещения по всем направлениям и на поворот вокруг осей  $x$  и  $y$ , на втором – на перемещения по осям  $y$  и  $z$ , и на поворот вокруг осей  $x$  и  $y$ . Такое закрепление в большей степени отражает реальные условия работы профиля в оконной системе, чем полностью шарнирное, поскольку в углах оконной рамы профили жестко соединены друг с другом посредством сварки. В профиле установлено температурное поле, соответствующее функции на рисунке 2.3. Модель, созданная в COMSOL, отражала реальную трехмерную геометрию ПВХ профиля и сердечника, в точках расположения саморезов между ПВХ профилем и сердечником были заданы шарнирные соединения типа «Cylindrical Joint» [93] с наложенной на осевое перемещение связью (рисунок 2.35).

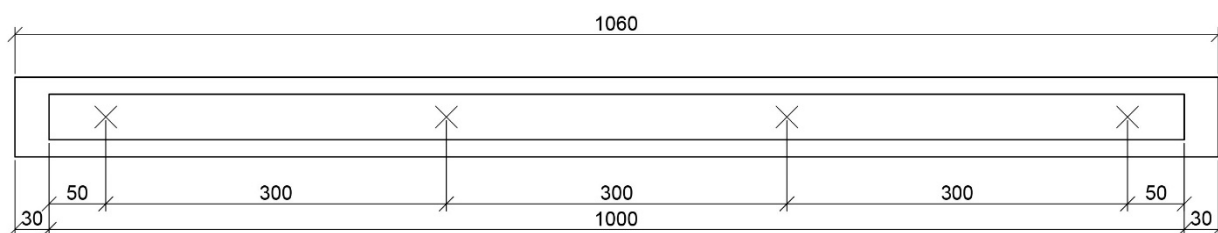


Рисунок 2.34 ПВХ профиль длиной 1060 мм с сердечником 1000 мм, прикрепленный саморезами в 4-х местах с шагом 300 мм

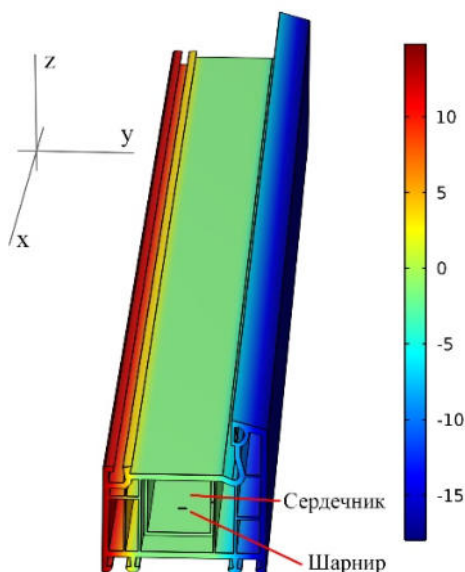


Рисунок 2.35 – 3D модель армированного профиля и заданное в ней температурное поле (легенда в °C)

Задача решалась в 4-х различных постановках:

1. Модуль упругости ПВХ был принят постоянным (равным 2700 МПа) и не зависящим от температуры, материал ПВХ считался идеально упругим;
2. Была использована зависимость модуля упругости ПВХ от температуры, изображенная на рисунке 1, материал ПВХ считался идеально упругим;

3. Модуль упругости ПВХ был принят постоянным (равным 2700 МПа) и не зависящим от температуры, материал ПВХ считался идеально упруго-пластичным с пределом текучести, не зависящим от температуры (равным 47 МПа);

4. Была использована зависимость модуля упругости ПВХ от температуры, изображенная на рисунке 1, материал ПВХ считался идеально упруго-пластичным с пределом текучести, определяемым интерполяцией в зависимости от температуры по таблице 1;

Дополнительные свойства материалов, использованные в расчете, представлены в таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Свойства материалов, используемые в расчете

Материал	Параметр	Значение
ПВХ	Коэффициент Пуассона	0.35
	Плотность	1500 кг/м <sup>3</sup>
	Коэф. лин. темп. расширения	$7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Сталь	Модуль упругости	73000 МПа
	Коэффициент Пуассона	0.25
	Плотность	2500 кг/м <sup>3</sup>
	Коэф. лин. темп. расширения	$1.22 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

Контролируемыми параметрами, на основе которых производилось сравнение результатов, были:

- Максимальные перемещения в ПВХ профиле и в армирующем сердечнике;
- Силы реакции в связях, наложенных на торцы ПВХ профиля;

Общий вид деформированной схемы (на примере 4-ой постановки) по результатам расчета показан на рисунке 2.36.

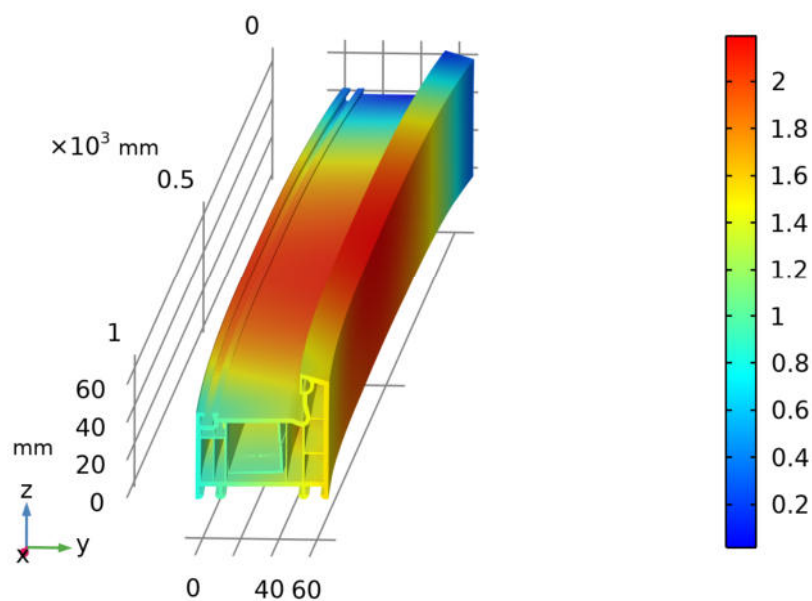


Рисунок 2.36 – Деформированная схема профиля (перемещения в мм)

Сравнение результатов по выделенным критериям для всех постановок задачи приведено в таблице 2.5.

Таблица 2.5 – Сравнение результатов моделирования различных постановок задачи

Показатель	Элемент	1 пост.	2 пост.	3 пост.	4 пост.
Макс. перемещение, мм	ПВХ проф.	2.1	2.2	2.1	2.2
	сердечник	1.9	2.0	1.9	2.0
Реактивный момент $M_x$ , Н·м		0.0053	0.0060	0.0074	0.0083
Реактивный момент $M_y$ , Н·м		-21.4	-22.7	-21.2	-22.4

Как видно из приведенных выше данных, физическая нелинейность материала практически никак не влияет на величину прогибов армированного ПВХ профиля и на моменты реакции в закрепленных гранях. Относительная разница между 1-ой постановкой (где физическая нелинейность материала не учитывалась совсем) и 4-ой (где она учитывалась в наибольшей степени) по прогибам составляет 4.8%. При этом результаты для 1 и 3 постановок, а также для 2 и 4-ой попарно совпали (с точностью до округления). Это говорит о том, что наблюдаемая разница в 4.8% обусловлена зависимостью модуля упругости ПВХ от температуры, а не его пластическими свойствами. Модуль упругости ПВХ повышается с понижением температуры и профиль, таким образом, приобретает большую изгибную жесткость и с большей силой сгибает армирующий сердечник. Пластические свойства ПВХ приводят к незначительному уменьшению реактивного момента  $M_y$ . Изгиб профиля вокруг оси  $y$  (изгиб происходит вниз) обусловлен тем, что в точках крепления ПВХ профиля к армирующему сердечнику возникают усилия (из-за разной температурной «усадки» профиля и сердечника») направленные вдоль оси  $x$  от центра профиля. Эти усилия имеют эксцентриситет по отношению к нейтральной оси профиля, что и вызывает изгиб. В следствие пластических свойств ПВХ в точках крепления происходит релаксация напряжений, величина продольных усилий уменьшается, уменьшается и изгибный момент. Учет зависимости модуля упругости и предела текучести ПВХ от температуры, наоборот, повышают реактивный момент  $M_y$ , поскольку при охлаждении увеличивается жесткость профиля и снижается эффект релаксации напряжений (предел текучести повышается с понижением температуры). По результатам также видно, что профиль почти не испытывает кручения.

Таким образом, было доказано, что игнорирование физической нелинейности ПВХ не приводит к существенным погрешностям при расчете зимних температурных деформаций элементов оконной конструкции.

## 2.7 Метод расчета температурных деформаций оконной конструкции как многокомпонентного целого

Обратимся к разрезу ПВХ окна (рисунок 2.37). Точки «Р» и «R» на рисунке 2.37 обозначают геометрический центр (нейтральную ось) ПВХ сечения и сечения армирующего сердечника соответственно. В результате температурных деформаций, профили окна изгибаются, при этом основные перемещения происходят в направлении оси  $Y$ . Будем предполагать, что деформация профилей подчиняется теореме о плоских сечениях, а кручение профилей не происходит или оно пренебрежимо мало. В этом случае при малых прогибах можно постулировать, что в поперечном сечении с произвольной координатой  $X$  в пределах каждого профиля перемещение всех точек вдоль оси  $Y$  одинаково (отличается на пренебрежимо малую величину). Таким образом, деформацию каждого профиля можно описать деформацией его нейтральной оси.

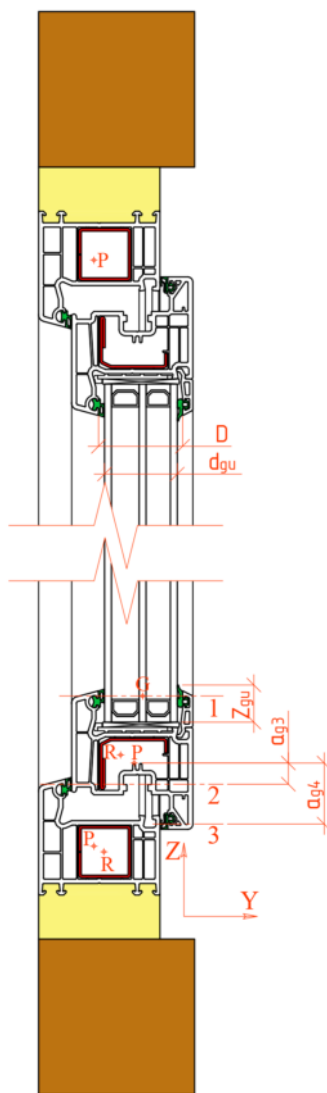


Рисунок 2.37 – Вертикальный разрез ПВХ окна



Введем следующее допущение относительно стеклопакета: *в произвольном поперечном сечении в краевой зоне ( $Z_{gu}$  на рисунке 2.37) все точки стеклопакета имеют одинаковое перемещение в направлении оси  $Y$  при приложении к стеклопакету нагрузки, действующей по оси  $Y$  в пределах краевой зоны. При этом деформация кромки стеклопакета от такой нагрузки подобна деформации балочного элемента с некой эквивалентной изгибной жёсткостью  $G_{glass}$ . Введенную величину ( $G_{glass}$ ) можно назвать эквивалентной жесткостью кромки (или краевой зоны) стеклопакета. Будем считать, что точка  $G$ , лежащая на линии 1 на середине толщины стеклопакета (см. рисунок 2.37), является геометрическим центром эквивалентного балочного элемента.*

Этиленпропиленовый синтетический каучук (EPDM) зарекомендовал себя как лучший материал для производства оконных уплотнителей. Он обладает высокой прочностью, деформируемостью, атмосферостойкостью и широким диапазоном рабочих температур. Резина EPDM относится к классу эластомеров, обладающих особыми механическими свойствами. Эластомеры имеют нелинейную зависимость напряжений от деформаций (даже при малых деформациях), они несжимаемы (коэффициент Пуассона для них можно принять равным 0.48 [27]), обладают эффектом Маллинза (уменьшение жесткости при циклическом нагружении) и имеют гистерезис (кривая нагрузки-разгрузки образует петлю). С учетом этих характеристик модель обычного упругого материала неприменима к эластомерам [46]. Высокая эластичность EPDM-резины приводит к ее значительным деформациям даже при небольших нагрузках, поэтому для описания ее напряженно-деформированного состояния необходимо пользоваться теорией упругости конечных деформаций, что еще больше усложняет постановку задачи [32, 34]. К настоящему времени разработано множество моделей гиперупругих материалов. Выбор той или иной модели возможен только при наличии экспериментальных данных о механической работе образца моделируемого материала (кривые нагрузки при одноосном/двухосном растяжении/сжатии, кручении, сдвиге и т.п.). Результаты механических испытаний EPDM-резины приведены в исследованиях [53, 58, 78]. В разрезе настоящей работы предлагается использовать упрощенный подход. Поскольку в расчетной модели мы представляем реальный уплотнитель как упругую связь, роль которой состоит в передаче усилия с одного элемента окна на другой, которое д.б. пропорционально степени сжатия уплотнителя, то представляется возможным ввести следующее допущение: *будем считать, что силы реакции отпора уплотнителя, возникающие при его деформации, подчиняются модели упругого основания Е. Винклера [4].* На рисунке 2.37 линиями 1, 2 и 3 отмечены направления, вдоль которых действует равнодействующая сил реакции отпора уплотнителей стеклопакета, наружного и внутреннего

уплотнителей створки соответственно. Положение этих линий может быть приближенно определено положением центра площадки контакта каждого из уплотнителей.

Рассмотрим теперь деформацию уплотнителей стеклопакета. Представим работу уплотнителей с помощью схемы, изображенной на рисунке 2.38. Слева и справа на схеме показаны неподвижные блоки, между которыми находится подвижный блок, соединенный с первыми посредством двух пружин, имитирующих работу уплотнителей. Пусть жесткость первой пружины будет  $\mu_1$ , а второй –  $\mu_2$ , начальная длина пружины –  $d_{g1}$  и  $d_{g2}$ , а длина в состоянии, когда система находится в равновесии –  $d_{g1}^*$  и  $d_{g2}^*$  соответственно.

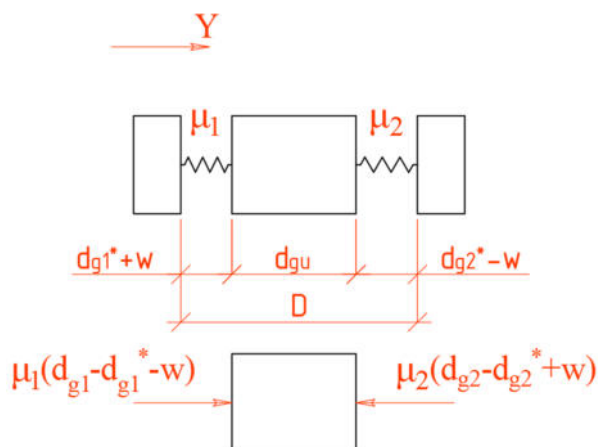


Рисунок 2.38 – Расчетная схема механической работы уплотнителя

Далее рассмотрим силы, действующие на подвижный блок со стороны пружин при небольшом смещении блока ( $w$ ) по направлению оси  $Y$ . На блок при этом будет действовать сила  $F$ :

$$F = \mu_1(d_{g1} - d_{g1}^* - w) - \mu_2(d_{g2} - d_{g2}^* + w) \quad (2.85)$$

$$F = \mu_1(d_{g1} - d_{g1}^*) - \mu_2(d_{g2} - d_{g2}^*) - w(\mu_1 + \mu_2)$$

Но по определению:

$$\mu_1(d_{g1} - d_{g1}^*) - \mu_2(d_{g2} - d_{g2}^*) = 0 \quad (2.86)$$

Следовательно:

$$F = -w(\mu_1 + \mu_2) \quad (2.87)$$

Таким образом, коэффициентом пропорциональности между модулем силы, действующей на подвижный блок, и его смещением служит величина  $\mu_1 + \mu_2$ . Другими словами две упругие связи, изображенные на рисунке 7.2, могут быть заменены одной с эквивалентной жесткостью:

$$\mu_{e1} = \mu_1 + \mu_2 \quad (2.88)$$

Уплотнители створки работают в одном направлении, поэтому очевидно сразу, что их совместная работа подобна работе одной упругой связи, имеющей жесткость, равную сумме жесткостей обоих уплотнителей:

$$\mu_{e2} = \mu_3 + \mu_4 \quad (2.89)$$

Здесь действует предположение о том, что оба уплотнителя створки одновременно вступают в контакт с рамой.

Введенные допущения позволяют сформулировать расчетную схему оконной ПВХ конструкции. В качестве расчетной единицы оконной конструкции необходимо использовать не отдельный профильный элемент окна, а т.н. комбинации профилей. Комбинация профилей представляет собой группу смежных параллельно расположенных элементов окна, взаимодействующих друг с другом посредством упругого уплотнителя и запорных механизмов. Оконную конструкцию любой конфигурации можно представить в виде комбинаций профилей, соединенных друг с другом в узлах (рисунок 2.39).

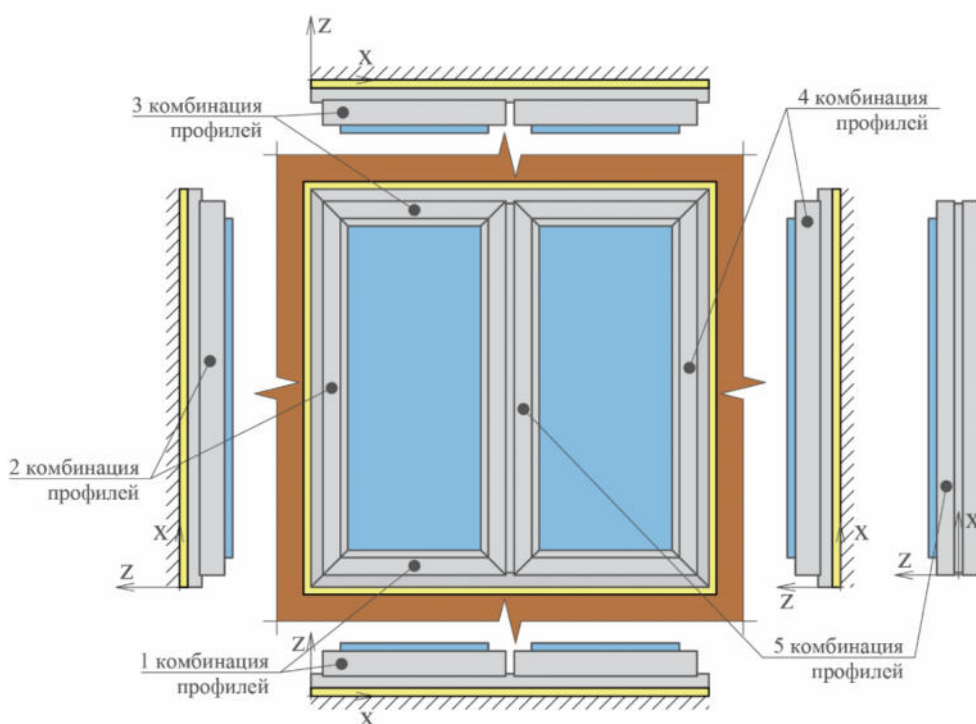


Рисунок 2.39 – Любую оконную конструкцию можно представить как совокупность комбинаций профилей

Для описания напряженно-деформированного состояния элементов комбинации профилей предлагается использовать расчетную схему, изображенную на рисунке 2.40. Она представляет собой группу параллельных стержневых элементов, соединенных друг с другом упругими связями, распределенными по длине элементов. При этом каждый из стержней имеет свою начальную кривизну (обусловленную температурным воздействием) и изгибную жесткость, на стержневые элементы действует произвольное количество сосредоточенных сил и моментов.

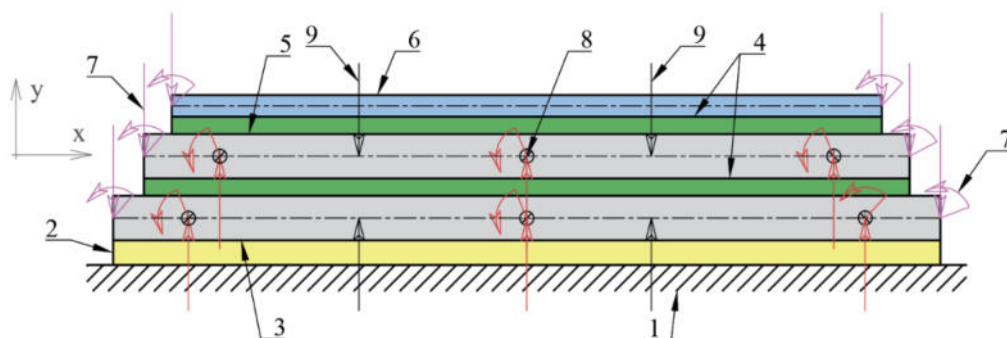


Рисунок 2.40 – Расчетная схема комбинации профилей: 1 – неподвижное основание; 2 – шов из монтажной пены; 3 – ПВХ профиль рамы; 4 – упругий уплотнитель; 5 – ПВХ профиль створки; 6 – кромка стеклопакета; 7 – краевые силы и моменты реакции; 8 – силы и моменты, возникающие в точках крепления к армирующему сердечнику; 9 – силы реакции в запирающих механизмах;

Далее необходимо получить уравнения, описывающие НДС элементов комбинации профилей. Так, пусть имеется профиль  $m$  (например импост окна) и несколько профилей  $n$  ( $n_1, n_2, \dots$ ) соприкасающихся с  $m$  через уплотнители (например, левая створка и правая створка). Перемещение точек профилей вдоль оси  $Y$  пусть описываются функциями  $u_m(x)$ ,  $u_{n1}(x)$ ,  $u_{n2}(x)$  и т.д. При деформации на профиль  $m$  со стороны профилей  $n$  через уплотнитель будет действовать распределенная нагрузка  $q_m(x)$ :

$$q_m(x) = -\mu_1 [u_m(x) - u_{n1}(x)] - \mu_2 [u_m(x) - u_{n2}(x)] - \dots \quad (2.90)$$

Известно, что для балочных элементов, которыми являются профили окна, функция перемещения оси связана с распределенной нагрузкой следующим образом:

$$\frac{d^4 u_m(x)}{dx^4} = \frac{q_m(x)}{G_m} + \frac{\phi_m(x)}{G_m} \quad (2.91)$$

где  $G_m$  – изгибная жесткость профиля  $m$ , а  $\phi_m(x)$  – внешняя распределенная нагрузка, действующая на профиль  $m$ .

Таким образом:

$$\frac{d^4 u_m(x)}{dx^4} + \frac{\mu_1}{G_m} [u_m(x) - u_{n1}(x)] + \frac{\mu_2}{G_m} [u_m(x) - u_{n2}(x)] + \dots = \frac{\phi_m(x)}{G_m} \quad (2.92)$$

Получено дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции  $u_m(x)$ . Входящие в это уравнение функции  $u_{n1}(x)$ ,  $u_{n2}(x)$  и т.д. тоже являются неизвестными, однако для каждого профиля  $n$  также можно записать уравнение, аналогичное (2.92). Таким образом будет получена система дифференциальных уравнений, в которой кол-во уравнений будет равно кол-ву неизвестных функций. Решению такой системы уравнений и будет посвящен следующий подраздел.

### 2.7.1 Решение системы уравнений, описывающей совместный изгиб нескольких профилей, соединенных упругим уплотнителем

Для начала рассмотрим обозначенную выше систему уравнений на паре конкретных примеров. Во-первых, на примере узла примыкания створки к раме, изображенном на рисунке 2.37, во-вторых, на примере узла импоста, изображенном на рисунке 2.41. Будем считать, что внешняя распределенная нагрузка отсутствует.

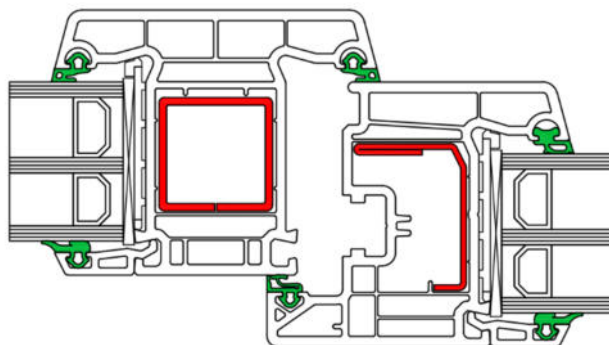


Рисунок 2.41 – Узел «импост-створка» с глухой частью

*Узел створка-рама*

Проиндексируем профили: 3 – профиль рамы, 2 – профиль створки, 1 – край стеклопакета.

С учетом этого можем записать систему уравнений для трех функций перемещений:

$$\begin{cases} \frac{d^4 u_1(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e1}}{G_1} [u_1(x) - u_2(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_2(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e1}}{G_2} [u_2(x) - u_1(x)] + \frac{\mu_{e2}}{G_2} [u_2(x) - u_3(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_3(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e2}}{G_3} [u_3(x) - u_2(x)] + \frac{\mu_{jt}}{G_3} u_3(x) = 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

где  $\mu_{jt}$  – жесткость шва из монтажной пены

Узел импост-створка. Проиндексируем профили: 4 – профиль импоста, 3 – профиль створки, 2 – край правого стеклопакета, 1 – край левого стеклопакета. С учетом этого можем записать систему уравнений для четырех функций перемещений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 u_1(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e1}}{G_1} [u_1(x) - u_4(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_2(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e1}}{G_2} [u_2(x) - u_3(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_3(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e2}}{G_3} [u_3(x) - u_4(x)] + \frac{\mu_{e1}}{G_3} [u_3(x) - u_2(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_4(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e2}}{G_4} [u_4(x) - u_3(x)] + \frac{\mu_{e1}}{G_4} [u_4(x) - u_1(x)] = 0 \end{array} \right. \quad (2.94)$$

Обе эти системы могут быть записаны в общем виде используя векторно-матричную форму:

$$\frac{d^4 \vec{U}(x)}{dx^4} + \Omega \cdot \vec{U}(x) = \vec{0} \quad (2.95)$$

В данном случае вектор  $\mathbf{U}$  содержит все неизвестные функции  $u(x)$ , а матрица  $\Omega$  полностью характеризует механические свойства системы.

Так, для узла створки:

$$\vec{U}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{e1}}{G_1} & -\frac{\mu_{e1}}{G_1} & 0 \\ -\frac{\mu_{e1}}{G_2} & \frac{\mu_{e1} + \mu_{e2}}{G_2} & -\frac{\mu_{e2}}{G_2} \\ 0 & -\frac{\mu_{e2}}{G_3} & \frac{\mu_{e2} + \mu_{jt}}{G_3} \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{e1} & -\mu_{e1} & 0 \\ -\mu_{e1} & \mu_{e1} + \mu_{e2} & -\mu_{e2} \\ 0 & -\mu_{e2} & \mu_{e2} + \mu_{jt} \end{bmatrix} = G^{-1} \mathbf{M}$$

Для узла imposta:

$$\vec{U}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ u_4(x) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{e1}}{G_1} & 0 & 0 & -\frac{\mu_{e1}}{G_1} \\ 0 & \frac{\mu_{e1}}{G_2} & -\frac{\mu_{e1}}{G_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_{e1}}{G_3} & \frac{\mu_{e1} + \mu_{e2}}{G_3} & -\frac{\mu_{e2}}{G_3} \\ -\frac{\mu_{e1}}{G_4} & 0 & -\frac{\mu_{e2}}{G_4} & \frac{\mu_{e1} + \mu_{e2}}{G_4} \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} \mu_{e1} & 0 & 0 & -\mu_{e1} \\ 0 & \mu_{e1} & -\mu_{e1} & 0 \\ 0 & -\mu_{e1} & \mu_{e1} + \mu_{e2} & -\mu_{e2} \\ -\mu_{e1} & 0 & -\mu_{e2} & \mu_{e1} + \mu_{e2} \end{bmatrix} = G^{-1} \mathbf{M}$$

Из рассмотренных примеров видно преимущество записи системы уравнений в виде (2.95): вектор  $\mathbf{U}$  может содержать любое кол-во неизвестных функций  $u(x)$ , вид уравнения при этом никак не меняется. Также можно видеть, что матрица  $\Omega$ , характеризующая конфигурацию механической системы и её жесткость, состоит из произведения матрицы, обратной матрице  $G$ , и симметричной матрицы  $M$ , состоящей из коэффициентов жесткости уплотнителей. Матрица  $G$  – это диагональная матрица, в которой элемент  $G_{ii}$  равен изгибной жесткости  $i$ -го стержня. Симметричная матрица  $M$  имеет положительные значения на главной диагонали и неположительные – в остальных местах.

Матрицу  $M$  можно записать сразу, без составления системы уравнений вида (2.93), (2.94). Так, значение  $M_{ij}$  (при  $i \neq j$ ) равно коэффициенту жесткости уплотнителя, расположенного между  $i$ -м и  $j$ -м профилями, взятый со знаком «-». Если  $i$ -й и  $j$ -й профили не являются смежными, то  $M_{ij} = 0$ . В силу этого определения  $M_{ij} = M_{ji}$ . Значение  $M_{ii}$  равно сумме коэффициентов жесткости всех уплотнителей (упругих связей), действующих на  $i$ -й стержень.

Теперь исследуем общий вид системы уравнений (2.92):

$$\frac{d^4 \vec{U}(x)}{dx^4} + \Omega \cdot \vec{U}(x) = G^{-1} \vec{\phi}(x) \quad (2.98)$$

Пусть имеется  $N$  функций  $u(x)$  ( $N$  стержней), входящих в систему (2.98), тогда:

$$\vec{U}(x) = \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_N(x) \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Поскольку в настоящий момент будут рассматриваться только температурные деформации, поэтому будем искать решение в случае, когда  $\phi(x) \equiv 0$ . С учётом этого перепишем (2.98).

$$\frac{d^4 \vec{U}(x)}{dx^4} = -\Omega \cdot \vec{U}(x) \quad (2.100)$$

Уравнение (2.100) говорит о том, что производная искомой функции пропорциональна самой функции, таким свойством обладает только экспонента, поэтому решение будем искать в виде:

$$\vec{U}(x) = e^{mx} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

Подставив (2.101) в (2.100), получим, что при нетривиальном решении должно быть:

$$m^4 = -\Omega \quad (2.102)$$

Предположим, что матрица  $\Omega$  диагонализируема. В таком случае матрицу  $\Omega$  можно представить как произведение матрицы перехода  $D$  (состоящей из собственных векторов  $\Omega$ ) и диагональной матрицы  $\Omega^*$  (состоящей из собственных значений  $\Omega$ ):

$$\Omega = D \cdot \Omega^* \cdot D^{-1} = D \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \cdot D^{-1} \quad (2.103)$$

Матрицы  $\Omega^*$  и  $D$  могут быть найдены любым из способов, которые не будут рассматриваться в рамках настоящей работы, отметим только, что произвести диагонализацию  $\Omega$  нужно будет только единожды, перед началом расчета.

Теперь возможно найти матрицу  $m$ . В силу (2.102) и (2.103):

$$D^{-1}m^4D = -\Omega^* = D^{-1}mDD^{-1}mDD^{-1}mDD^{-1}mD = (D^{-1}mD)^4 \quad (2.104)$$

Т.е. матрица  $m$  также является диагонализируемой с помощью матрицы  $D$ . Пусть в диагональном виде матрица  $m$  выглядит так:

$$m^* = D^{-1}mD = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M_N \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Согласно (2.104) и (2.105):

$$m^{*4} = \begin{bmatrix} M_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M_N^4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Что эквивалентно выражению:

$$M_k^4 = -\lambda_k \quad (2.107)$$

Откуда находим:

$$M_k = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\lambda_k/4}(1+i) \\ -\sqrt[4]{\lambda_k/4}(1+i) \\ \sqrt[4]{\lambda_k/4}(1-i) \\ -\sqrt[4]{\lambda_k/4}(1-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_k(1+i) \\ -\varphi_k(1+i) \\ \varphi_k(1-i) \\ -\varphi_k(1-i) \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$\varphi_k = \sqrt[4]{\lambda_k/4}$$



Т.е. каждый элемент  $m^*$ , стоящий на главной диагонали, может принимать одно из 4-х значений, следовательно, существует  $4^N$  различных (но линейно зависимых) матриц  $m$ , которые удовлетворяют уравнению (2.102). Будем обозначать  $k$ -й элемент главной диагонали  $i$ -й матрицы  $m^*$  как  $M_{ik}$  ( $i \in [1; 4^N]$ ).

Полным решением уравнения (2.100) является линейная комбинация  $4^N$  функций (2.101):

$$\begin{aligned}
\vec{U}(x) &= \sum_{i=1}^{4^N} \left( C_i e^{m_i x} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^{4^N} (C_i e^{m_i x}) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4^N} (C_i e^{D \cdot m_i^* \cdot D^{-1}}) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = D \cdot \sum_{i=1}^{4^N} (C_i e^{m_i^* x}) \cdot D^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \\
&= D \cdot \sum_{i=1}^{4^N} \left( C_i \begin{bmatrix} e^{M_{i1}x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{M_{i2}x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{M_{iN}x} \end{bmatrix} \right) \cdot D^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \\
&= D \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4^N} C_i e^{M_{i1}x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{4^N} C_i e^{M_{i2}x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{4^N} C_i e^{M_{iN}x} \end{bmatrix} \cdot D^{-1} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \\
&= D \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4^N} C_i e^{M_{i1}x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{4^N} C_i e^{M_{i2}x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{4^N} C_i e^{M_{iN}x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \\ \vdots \\ U_N^* \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4^N} U_1^* C_i e^{M_{i1}x} \\ \sum_{i=1}^{4^N} U_2^* C_i e^{M_{i2}x} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{4^N} U_N^* C_i e^{M_{iN}x} \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} F_1^*(x) \\ F_2^*(x) \\ \vdots \\ F_N^*(x) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Исследуем функции  $F^*$ . Как уже было сказано, величины  $M_{ik}$  могут принимать только четыре разных значения, следовательно в сумме с  $4^N$  слагаемыми коэффициенты  $C$  можно объединить в 4-ре группы:

$$F_p^*(x) = \sum_{i=1}^{4^N} U_p^* C_i e^{M_{ip}x} = e^{\varphi_p(1+i)x} U_p^* \sum C + e^{-\varphi_p(1+i)x} U_p^* \sum C + e^{\varphi_p(1-i)x} U_p^* \sum C + e^{-\varphi_p(1-i)x} U_p^* \sum C \tag{2.110}$$

При этом все суммы (группы) коэффициентов  $C$ , которые входят в функции  $F^*$  будут линейно независимыми, что означает, каждую из них можно заменить независимой константой. Таким образом:

$$F_p^*(x) = e^{\varphi_p(1+i)x} C_{p1} + e^{-\varphi_p(1+i)x} C_{p2} + e^{\varphi_p(1-i)x} C_{p3} + e^{-\varphi_p(1-i)x} C_{p4} \tag{2.111}$$

Преобразуя (2.111), получаем:

$$F_p^*(x) = \begin{bmatrix} e^{\varphi_p x} \\ e^{-\varphi_p x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{p11} & C_{p12} \\ C_{p21} & C_{p22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi_p x) \\ i \cdot \sin(\varphi_p x) \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

Мнимая часть решения (2.112) дает дополнительное действительное решение, таким образом, в полном действительном решении функции  $F^*$  будут иметь вид:

$$F_p^*(x) = \bar{R}(\varphi_p x) \cdot C_p \cdot \bar{I}(\varphi_p x)$$

$$\bar{R}(\varphi_p x) = \begin{bmatrix} e^{\varphi_p x} \\ e^{-\varphi_p x} \end{bmatrix}; \quad \bar{I}(\varphi_p x) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_p x) \\ \sin(\varphi_p x) \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

$$C_p = \begin{bmatrix} C_{p11} & C_{p12} \\ C_{p21} & C_{p22} \end{bmatrix}$$

Продифференцируем функцию (2.113) три раза.

$$F_p^*(x)' = \varphi_p \begin{bmatrix} e^{\varphi_p x} \\ -e^{-\varphi_p x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{p11} & C_{p12} \\ C_{p21} & C_{p22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi_p x) \\ \sin(\varphi_p x) \end{bmatrix} + \varphi_p \begin{bmatrix} e^{\varphi_p x} \\ e^{-\varphi_p x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{p11} & C_{p12} \\ C_{p21} & C_{p22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_p x) \\ \cos(\varphi_p x) \end{bmatrix}$$

$$F_p^*(x)'' = 2 \cdot \varphi_p^2 \begin{bmatrix} e^{\varphi_p x} \\ -e^{-\varphi_p x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{p11} & C_{p12} \\ C_{p21} & C_{p22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_p x) \\ \cos(\varphi_p x) \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

$$F_p^*(x)''' = 2 \cdot \varphi_p^3 \begin{bmatrix} e^{\varphi_p x} \\ e^{-\varphi_p x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{p11} & C_{p12} \\ C_{p21} & C_{p22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_p x) \\ \cos(\varphi_p x) \end{bmatrix} - 2 \cdot \varphi_p^3 \begin{bmatrix} e^{\varphi_p x} \\ -e^{-\varphi_p x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{p11} & C_{p12} \\ C_{p21} & C_{p22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi_p x) \\ \sin(\varphi_p x) \end{bmatrix}$$

## 2.7.2 Определение констант интегрирования

Рассчитаем значение функции  $F^*$  и трех ее производных в точке  $x = 0$ .

$$F_p^*(0) = C_{p11} + C_{p21}$$

$$F_p^*(0)' = \varphi_p (C_{p11} - C_{p21} + C_{p12} + C_{p22})$$

$$F_p^*(0)'' = 2 \cdot \varphi_p^2 (C_{p12} - C_{p22})$$

$$F_p^*(0)''' = 2 \cdot \varphi_p^3 (C_{p12} + C_{p22} - (C_{p11} - C_{p21})) \quad (2.115)$$

При подстановке (2.115) в (2.109) получаем:

$$\begin{aligned}
D^{-1}\vec{U}(0) &= \begin{bmatrix} C_{111} + C_{121} \\ C_{211} + C_{221} \\ \vdots \\ C_{N11} + C_{N21} \end{bmatrix} \\
\Theta^{*-1}D^{-1}\vec{U}'(0) &= \begin{bmatrix} C_{111} - C_{121} + C_{112} + C_{122} \\ C_{211} - C_{221} + C_{212} + C_{222} \\ \vdots \\ C_{N11} - C_{N21} + C_{N12} + C_{N22} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2}\Theta^{*-2}D^{-1}\vec{U}''(0) &= \begin{bmatrix} C_{112} - C_{122} \\ C_{212} - C_{222} \\ \vdots \\ C_{N12} - C_{N22} \end{bmatrix} \\
\frac{1}{2}\Theta^{*-3}D^{-1}\vec{U}'''(0) &= \begin{bmatrix} C_{112} + C_{122} - (C_{111} - C_{121}) \\ C_{112} + C_{p22} - (C_{111} - C_{121}) \\ \vdots \\ C_{N12} + C_{N22} - (C_{N11} - C_{N21}) \end{bmatrix} \\
\Theta^* &= \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_N \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Откуда находим:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} C_{112} \\ C_{212} \\ \vdots \\ C_{N12} \end{bmatrix} &= \Theta^{*-1}D^{-1}\frac{\vec{U}'(0)}{4} + \Theta^{*-2}D^{-1}\frac{\vec{U}''(0)}{4} + \Theta^{*-3}D^{-1}\frac{\vec{U}'''(0)}{8} \\
\begin{bmatrix} C_{111} \\ C_{211} \\ \vdots \\ C_{N11} \end{bmatrix} &= D^{-1}\frac{\vec{U}(0)}{2} + \Theta^{*-1}D^{-1}\frac{\vec{U}'(0)}{4} - \Theta^{*-3}D^{-1}\frac{\vec{U}'''(0)}{8} \\
\begin{bmatrix} C_{122} \\ C_{222} \\ \vdots \\ C_{N22} \end{bmatrix} &= \Theta^{*-1}D^{-1}\frac{\vec{U}'(0)}{4} - \Theta^{*-2}D^{-1}\frac{\vec{U}''(0)}{4} + \Theta^{*-3}D^{-1}\frac{\vec{U}'''(0)}{8} \\
\begin{bmatrix} C_{121} \\ C_{221} \\ \vdots \\ C_{N21} \end{bmatrix} &= D^{-1}\frac{\vec{U}(0)}{2} - \Theta^{*-1}D^{-1}\frac{\vec{U}'(0)}{4} + \Theta^{*-3}D^{-1}\frac{\vec{U}'''(0)}{8}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Для дальнейших рассуждений необходимо перейти к тензорному виду записи уравнений, при этом будем пользоваться соглашением Эйнштейна при суммировании. Так, выражение (2.109) можно переписать следующим образом:

$$U_q(x) = D_{qj} F_j^*(x) \quad (2.118)$$

при этом

$$F_j^*(x) = C_{jik} I_{kj}(x) R_{ij}(x) \text{ по } j \text{ не суммировать} \quad (2.119)$$

таким образом:

$$U_q(x) = D_{qj} C_{jik} I_{kj}(x) R_{ij}(x) \quad (2.120)$$

где

$$R(x) = \begin{bmatrix} e^{\varphi_1 x} & e^{\varphi_2 x} & \dots & e^{\varphi_N x} \\ e^{-\varphi_1 x} & e^{-\varphi_2 x} & \dots & e^{-\varphi_N x} \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

$$I(x) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1 x) & \cos(\varphi_2 x) & \dots & \cos(\varphi_N x) \\ \sin(\varphi_1 x) & \sin(\varphi_2 x) & \dots & \sin(\varphi_N x) \end{bmatrix}$$

Уравнения (2.117) можно записать следующим образом:

$$C_{jik} = \frac{\delta_{0ik}}{2} (D^{-1})_{jp} U(0)_p + \frac{\delta_{1ik}}{4} (\Theta^{*-1})_{jp} (D^{-1})_{pr} U'(0)_r + \quad (2.122)$$

$$+ \frac{\delta_{2ik}}{4} (\Theta^{*-2})_{jp} (D^{-1})_{pr} U''(0)_r + \frac{\delta_{3ik}}{8} (\Theta^{*-3})_{jp} (D^{-1})_{pr} U'''(0)_r$$

где

$$\delta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$\delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \delta_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь можно подставить (2.122) в (2.120) и явным образом выразить функции прогибов от их начальных параметров.

$$U_q(x) = D_{qj} \frac{\delta_{0ik}}{2} (D^{-1})_{jp} U(0)_p I_{kj}(x) R_{ij}(x) + \quad (2.124)$$

$$+ D_{qj} \frac{\delta_{1ik}}{4} (\Theta^{*-1})_{jp} (D^{-1})_{pr} U'(0)_r I_{kj}(x) R_{ij}(x) +$$

$$+ D_{qj} \frac{\delta_{2ik}}{4} (\Theta^{*-2})_{jp} (D^{-1})_{pr} U''(0)_r I_{kj}(x) R_{ij}(x) +$$

$$+ D_{qj} \frac{\delta_{3ik}}{8} (\Theta^{*-3})_{jp} (D^{-1})_{pr} U'''(0)_r I_{kj}(x) R_{ij}(x)$$

$$U_q(x) = \frac{1}{2} D_{qj} \left( R^T(x) \delta_0 I(x) \right)_{jj} \left( D^{-1} \bar{U}(0) \right)_j + \frac{1}{4} D_{qj} \left( R^T(x) \delta_1 I(x) \right)_{jj} \left( \Theta^{*-1} D^{-1} \bar{U}'(0) \right)_j + \frac{1}{4} D_{qj} \left( R^T(x) \delta_2 I(x) \right)_{jj} \left( \Theta^{*-2} D^{-1} \bar{U}''(0) \right)_j + \frac{1}{8} D_{qj} \left( R^T(x) \delta_3 I(x) \right)_{jj} \left( \Theta^{*-3} D^{-1} \bar{U}'''(0) \right)_j \quad (2.125)$$

$$U_q(x) = \frac{1}{2} D_{qj} \left( \Psi_0^*(x) D^{-1} \bar{U}(0) \right)_j + \frac{1}{4} D_{qj} \left( \Psi_1^*(x) D^{-1} \bar{U}'(0) \right)_j + \frac{1}{4} D_{qj} \left( \Psi_2^*(x) D^{-1} \bar{U}''(0) \right)_j + \frac{1}{8} D_{qj} \left( \Psi_3^*(x) D^{-1} \bar{U}'''(0) \right)_j \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(x) &= \frac{1}{2} D \Psi_0^*(x) D^{-1} \bar{U}(0) + \frac{1}{4} D \Psi_1^*(x) D^{-1} \bar{U}'(0) + \\ &+ \frac{1}{4} D \Psi_2^*(x) D^{-1} \bar{U}''(0) + \frac{1}{8} D \Psi_3^*(x) D^{-1} \bar{U}'''(0) \\ \Psi_k^*(x) &= \begin{bmatrix} \left( R^T(x) \delta_k I(x) \right)_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left( R^T(x) \delta_k I(x) \right)_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left( R^T(x) \delta_k I(x) \right)_{NN} \end{bmatrix} \cdot \Theta^{*-k} \end{aligned} \quad (2.127)$$

В (2.125)-(2.127) показаны преобразования, которые были сделаны для упрощения выражения (2.124). Так, в (2.127) видим, что искомые функции перемещений выражены через начальные значения этих функций и их трех производных в точке  $x = 0$ . Обратимся к матричным функциям  $\Psi^*(x)$ . Оказывается, что они состоят из функций Крылова, при этом легко увидеть, что главные оси этих матриц совпадают с главными осями матрицы  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \left( R^T(x) \delta_1 I(x) \right)_{kk} &= 2 \operatorname{ch}(\varphi_k x) \cos(\varphi_k x) = 2A(\varphi_k x) \\ \left( R^T(x) \delta_2 I(x) \right)_{kk} &= 2 \operatorname{sh}(\varphi_k x) \cos(\varphi_k x) + 2 \operatorname{ch}(\varphi_k x) \sin(\varphi_k x) = 4B(\varphi_k x) \\ \left( R^T(x) \delta_3 I(x) \right)_{kk} &= 2 \operatorname{sh}(\varphi_k x) \sin(\varphi_k x) = 4C(\varphi_k x) \\ \left( R^T(x) \delta_4 I(x) \right)_{kk} &= 2 \operatorname{ch}(\varphi_k x) \sin(\varphi_k x) - 2 \operatorname{sh}(\varphi_k x) \cos(\varphi_k x) = 8D(\varphi_k x) \end{aligned} \quad (2.128)$$

Т.е. решение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{U}(x) &= \Psi_0(x)\bar{U}(0) + \Psi_1(x)\bar{U}'(0) + \Psi_2(x)\bar{U}''(0) + \Psi_3(x)\bar{U}'''(0) \\ \Psi_i(x) &= D\Psi_i^*(x)D^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_0^*(x) &= \begin{bmatrix} A(\varphi_1 x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(\varphi_2 x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A(\varphi_N x) \end{bmatrix}; \Psi_1^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{B(\varphi_1 x)}{\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{B(\varphi_2 x)}{\varphi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B(\varphi_N x)}{\varphi_N} \end{bmatrix} \\ \Psi_2^*(x) &= \begin{bmatrix} \frac{C(\varphi_1 x)}{\varphi_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{C(\varphi_2 x)}{\varphi_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C(\varphi_N x)}{\varphi_N^2} \end{bmatrix}; \Psi_3^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{D(\varphi_1 x)}{\varphi_1^3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{D(\varphi_2 x)}{\varphi_2^3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{D(\varphi_N x)}{\varphi_N^3} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.129)$$

В силу свойств функций Крылова [79]:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_0^*(x)}{dx} &= -4\Theta^* \Psi_3^*(x) & \frac{d\Psi_0(x)}{dx} &= -\Omega\Psi_3(x) \\ \frac{d\Psi_1^*(x)}{dx} &= \Psi_0^*(x) & \frac{d\Psi_1(x)}{dx} &= \Psi_0(x) \\ \frac{d\Psi_2^*(x)}{dx} &= \Psi_1^*(x) & \frac{d\Psi_2(x)}{dx} &= \Psi_1(x) \\ \frac{d\Psi_3^*(x)}{dx} &= \Psi_2^*(x) & \frac{d\Psi_3(x)}{dx} &= \Psi_2(x)\end{aligned}\quad (2.130)$$

Продифференцируем (2.129) три раза:

$$\begin{aligned}\bar{U}'(x) &= -\Omega\Psi_3(x)\bar{U}(0) + \Psi_0(x)\bar{U}'(0) + \Psi_1(x)\bar{U}''(0) + \Psi_2(x)\bar{U}'''(0) \\ \bar{U}''(x) &= -\Omega\Psi_2(x)\bar{U}(0) - \Omega\Psi_3(x)\bar{U}'(0) + \Psi_0(x)\bar{U}''(0) + \Psi_1(x)\bar{U}'''(0) \\ \bar{U}'''(x) &= -\Omega\Psi_1(x)\bar{U}(0) - \Omega\Psi_2(x)\bar{U}'(0) - \Omega\Psi_3(x)\bar{U}''(0) + \Psi_0(x)\bar{U}'''(0)\end{aligned}\quad (2.131)$$

### 2.7.3 Учёт сосредоточенных сил и моментов

Предположим, в точке с координатой  $x = a$  на каждый из  $N$  профилей, соединенных упругими уплотнителями, действует нагрузка в виде сосредоточенных сил  $P_1, P_2, \dots, P_N$  и сосредоточенных моментов  $M_1, M_2, \dots, M_N$ . Это значит, что в точке  $x = a$  будет наблюдаться конечное приращение функций  $U''(x)$  и  $U'''(x)$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} U_i''(a+0) &= U_i''(a-0) + \Delta U_i'' \\ U_i'''(a+0) &= U_i'''(a-0) + \Delta U_i''' \end{aligned} \quad (2.132)$$

где величины конечных приращений  $\Delta U_i''(x)$  и  $\Delta U_i'''(x)$  зависят от величины приложенной нагрузки (положительными считаются моменты, вектор которых сонаправлен оси Z, и силы, вектор которых сонаправлен оси Y):

$$\Delta U_i'' = \frac{-M_i}{G_i}; \quad \Delta U_i''' = \frac{P_i}{G_i} \quad (2.133)$$

Перенесём начало координат в точку  $x = a$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - a > 0 \\ \vec{U}(\bar{x}) &= \Psi_0(\bar{x})\vec{U}(+0) + \Psi_1(\bar{x})\vec{U}'(+0) + \Psi_2(\bar{x})\vec{U}''(+0) + \Psi_3(\bar{x})\vec{U}'''(+0) \\ \vec{U}(\bar{x}) &= \Psi_0(\bar{x})\vec{U}(-0) + \Psi_1(\bar{x})\vec{U}'(-0) + \Psi_2(\bar{x})\vec{U}''(-0) + \Psi_3(\bar{x})\vec{U}'''(-0) \\ &+ \Psi_2(\bar{x})\Delta\vec{U}'' + \Psi_3(\bar{x})\Delta\vec{U}''' \end{aligned} \quad (2.134)$$

В уравнении (2.134) значения функции  $U$  и её производных в точке  $-0$  соответствует точке, бесконечно близко подходящей к точке  $0$  слева (координаты в подчеркнутой системе координат также будем подчеркивать). С другой стороны, относительно исходной системы координат эти значения равны:

$$\begin{aligned} \vec{U}(-0) &= \Psi_0(a)\vec{U}(0) + \Psi_1(a)\vec{U}'(0) + \Psi_2(a)\vec{U}''(0) + \Psi_3(a)\vec{U}'''(0) \\ \vec{U}'(-0) &= -\Omega\Psi_3(a)\vec{U}(0) + \Psi_0(a)\vec{U}'(0) + \Psi_1(a)\vec{U}''(0) + \Psi_2(a)\vec{U}'''(0) \\ \vec{U}''(-0) &= -\Omega\Psi_2(a)\vec{U}(0) - \Omega\Psi_3(a)\vec{U}'(0) + \Psi_0(a)\vec{U}''(0) + \Psi_1(a)\vec{U}'''(0) \\ \vec{U}'''(-0) &= -\Omega\Psi_1(a)\vec{U}(0) - \Omega\Psi_2(a)\vec{U}'(0) - \Omega\Psi_3(a)\vec{U}''(0) + \Psi_0(a)\vec{U}'''(0) \end{aligned} \quad (2.135)$$

Подставляя (2.135) в (2.134), получаем:

$$\begin{aligned} \vec{U}(\bar{x}) &= [\Psi_0(\bar{x})\Psi_0(a) - \Omega\Psi_1(\bar{x})\Psi_3(a) - \Omega\Psi_2(\bar{x})\Psi_2(a) - \Omega\Psi_3(\bar{x})\Psi_1(a)]\vec{U}(0) + \\ &+ [\Psi_0(\bar{x})\Psi_1(a) + \Psi_1(\bar{x})\Psi_0(a) - \Omega\Psi_2(\bar{x})\Psi_3(a) - \Omega\Psi_3(\bar{x})\Psi_2(a)]\vec{U}'(0) + \\ &+ [\Psi_0(\bar{x})\Psi_2(a) + \Psi_1(\bar{x})\Psi_1(a) + \Psi_2(\bar{x})\Psi_0(a) - \Omega\Psi_3(\bar{x})\Psi_3(a)]\vec{U}''(0) + \\ &+ [\Psi_0(\bar{x})\Psi_3(a) + \Psi_1(\bar{x})\Psi_2(a) + \Psi_2(\bar{x})\Psi_1(a) + \Psi_3(\bar{x})\Psi_0(a)]\vec{U}'''(0) + \\ &+ \Psi_2(\bar{x})\Delta\vec{U}'' + \Psi_3(\bar{x})\Delta\vec{U}''' \end{aligned} \quad (2.136)$$

При подробном исследовании величин, стоящих в (2.136) в квадратных скобках, получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_0(\bar{x})\Psi_0(a) - \Omega\Psi_1(\bar{x})\Psi_3(a) - \Omega\Psi_2(\bar{x})\Psi_2(a) - \Omega\Psi_3(\bar{x})\Psi_1(a) &= \Psi_0(\bar{x}+a) \\ \Psi_0(\bar{x})\Psi_1(a) + \Psi_1(\bar{x})\Psi_0(a) - \Omega\Psi_2(\bar{x})\Psi_3(a) - \Omega\Psi_3(\bar{x})\Psi_2(a) &= \Psi_1(\bar{x}+a) \\ \Psi_0(\bar{x})\Psi_2(a) + \Psi_1(\bar{x})\Psi_1(a) + \Psi_2(\bar{x})\Psi_0(a) - \Omega\Psi_3(\bar{x})\Psi_3(a) &= \Psi_2(\bar{x}+a) \\ \Psi_0(\bar{x})\Psi_3(a) + \Psi_1(\bar{x})\Psi_2(a) + \Psi_2(\bar{x})\Psi_1(a) + \Psi_3(\bar{x})\Psi_0(a) &= \Psi_3(\bar{x}+a) \end{aligned} \quad (2.137)$$

T.e.

$$\begin{aligned}
\bar{U}(\bar{x}) &= \Psi_0(\bar{x}+a)\bar{U}(0) + \Psi_1(\bar{x}+a)\bar{U}'(0) + \Psi_2(\bar{x}+a)\bar{U}''(0) + \Psi_3(\bar{x}+a)\bar{U}'''(0) + \\
&+ \Psi_2(\bar{x})\Delta\bar{U}'' + \Psi_3(\bar{x})\Delta\bar{U}''' \\
\bar{U}(\bar{x}) &= \Psi_0(x)\bar{U}(0) + \Psi_1(x)\bar{U}'(0) + \Psi_2(x)\bar{U}''(0) + \Psi_3(x)\bar{U}'''(0) + \\
&+ \Psi_2(\bar{x})\Delta\bar{U}'' + \Psi_3(\bar{x})\Delta\bar{U}'''
\end{aligned} \tag{2.138}$$

$$\bar{U}(\bar{x}) = \bar{U}(x) + \Psi_2(\bar{x})\Delta\bar{U}'' + \Psi_3(\bar{x})\Delta\bar{U}'''$$

Последнее равенство в (2.138) означает, что правее приложенной в точке  $x = a$  нагрузки уравнение прогиба складывается из двух частей: из уравнения прогиба, определенного по начальным параметрам в точке  $x = 0$  (как если бы нагрузки не было) и двух дополнительных слагаемых, зависящих от величины самой нагрузки. Таким образом, при произвольном количестве сосредоточенных сил и моментов уравнение прогибов будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\bar{U}(x) &= \Psi_0(x)\bar{U}(0) + \Psi_1(x)\bar{U}'(0) + \Psi_2(x)\bar{U}''(0) + \Psi_3(x)\bar{U}'''(0) - \\
&- \sum_k \Psi_2(x-a_k)G^{-1}\bar{M}_k + \sum_n \Psi_3(x-a_n)G^{-1}\bar{P}_n \\
\bar{M}_k &= \begin{bmatrix} M_{1k} \\ M_{2k} \\ \vdots \\ M_{Nk} \end{bmatrix}; \bar{P}_n = \begin{bmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \\ \vdots \\ P_{Nn} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.139}$$

Продифференцируем это уравнение три раза.

$$\begin{aligned}
\bar{U}'(x) &= -\Omega\Psi_3(x)\bar{U}(0) + \Psi_0(x)\bar{U}'(0) + \Psi_1(x)\bar{U}''(0) + \Psi_2(x)\bar{U}'''(0) - \sum_k \Psi_1(x-a_k)G^{-1}\bar{M}_k + \\
&+ \sum_n \Psi_2(x-a_n)G^{-1}\bar{P}_n \\
\bar{U}''(x) &= -\Omega\Psi_2(x)\bar{U}(0) - \Omega\Psi_3(x)\bar{U}'(0) + \Psi_0(x)\bar{U}''(0) + \Psi_1(x)\bar{U}'''(0) - \sum_k \Psi_0(x-a_k)G^{-1}\bar{M}_k + \\
&+ \sum_n \Psi_1(x-a_n)G^{-1}\bar{P}_n \\
\bar{U}'''(x) &= -\Omega\Psi_1(x)\bar{U}(0) - \Omega\Psi_2(x)\bar{U}'(0) - \Omega\Psi_3(x)\bar{U}''(0) + \Psi_0(x)\bar{U}'''(0) + \Omega\sum_k \Psi_0(x-a_k)G^{-1}\bar{M}_k + \\
&+ \sum_n \Psi_0(x-a_n)G^{-1}\bar{P}_n
\end{aligned} \tag{2.140}$$

#### 2.7.4 Частные случаи

##### $\det(\Omega)=0$

Если  $\det(\Omega)=0$ , то значит, как минимум одно собственное значение матрицы  $\Omega$  равно нулю. Если нулю равны несколько собственных значений матрицы  $\Omega$ , то возможность её диагонализации ставится под вопрос.



Можно показать, что в случае, если ни один из профилей системы не имеет крепления через распределенную по его длине упругую связь к неподвижному основанию, то определитель матрицы  $\Omega$  обязательно будет равен нулю (при этом нулевым будет только одно собственное значение матрицы). Почему это так, на интуитивном уровне можно понять, исходя из следующего соображения: представим стержневую систему, которая «висит» в воздухе. В этом случае никаких усилий в уплотнителях возникать не будет, если все стержни будут перемещаться и поворачиваться как единый объект, а также если все стержни будут иметь одинаковую кривизну, либо одинаковую производную кривизны по длине при одинаковых начальных параметрах. Это происходит от того, что усилия в уплотнителях возникают из-за относительных (а не абсолютных) перемещений стержней, а во всех перечисленных выше случаях  $\Delta U \equiv 0$ . С другой стороны, если хотя бы один стержень имеет связь с неподвижным основанием, то даже при одинаковых начальных параметрах всех стержней в упругих связях будут возникать напряжения.

Так, нами ранее было рассмотрено два примера стержневой системы: система «створка-рама», где рама имеет по всей длине крепление к неподвижному основанию (строительному проему) через монтажную пену (упругая связь), и система «створка-импост», где такой связи с неподвижным основанием нет. Не трудно проверить, что определитель матрицы (2.96), соответствующей первому случаю, не равен нулю, в то время как определитель матрицы (2.97), соответствующей второму случаю, будет нулевым.

Рассмотрим, каким образом при  $\det(\Omega)=0$  изменятся функции  $\Psi$ . Нулевое собственное значение будем ставить в самом конце матрицы  $\Omega^*$ , т.е.  $\lambda_N = 0 \Rightarrow \varphi_N = 0$ .

$$\Psi_i(x) = D\Psi_i^*(x)D^{-1}$$

$$\lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \Psi_0^*(x) = \begin{bmatrix} A(\varphi_1 x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(\varphi_2 x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} A(\varphi_N x) \end{bmatrix}; \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \Psi_1^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{B(\varphi_1 x)}{\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{B(\varphi_2 x)}{\varphi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{B(\varphi_N x)}{\varphi_N} \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

$$\lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \Psi_2^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{C(\varphi_1 x)}{\varphi_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{C(\varphi_2 x)}{\varphi_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{C(\varphi_N x)}{\varphi_N^2} \end{bmatrix}; \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \Psi_3^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{D(\varphi_1 x)}{\varphi_1^3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{D(\varphi_2 x)}{\varphi_2^3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{D(\varphi_N x)}{\varphi_N^3} \end{bmatrix}$$

Определим, чему равны пределы, входящие в (2.142).

$$\lim_{\varphi_N \rightarrow 0} A(\varphi_N x) = A(0) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{B(\varphi_N x)}{\varphi_N} &= \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{B(\varphi_N x) - B(0 \cdot x)}{\varphi_N} = \left. \frac{dB(\varphi_N x)}{d\varphi_N} \right|_{\varphi_N=0} = x \\ \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{C(\varphi_N x)}{\varphi_N^2} &= \frac{1}{2} \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{\sin(\varphi_N x) \operatorname{sh}(\varphi_N x)}{\varphi_N^2} = \frac{1}{2} \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{\sin(\varphi_N x)}{\varphi_N} \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\varphi_N x)}{\varphi_N} = \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{d \sin(\varphi_N x)}{d\varphi_N} \right|_{\varphi_N=0} \cdot \left. \frac{d \operatorname{sh}(\varphi_N x)}{d\varphi_N} \right|_{\varphi_N=0} = \frac{1}{2} x^2 \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{D(\varphi_N x)}{\varphi_N^3} = \frac{1}{4} \lim_{\varphi_N \rightarrow 0} \frac{\sin(\varphi_N x) \operatorname{ch}(\varphi_N x) - \cos(\varphi_N x) \operatorname{sh}(\varphi_N x)}{\varphi_N^3} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{2}{2!} - \frac{2}{3!} \right) x^3 = \frac{1}{6} x^3$$

Последнее равенство в (2.142) получено при помощи разложения функций  $\sin$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\cos$  и  $\operatorname{sh}$  в ряд Тейлора. При подстановке (2.142) в (2.141) получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_i(x) &= D\Psi_i^*(x)D^{-1} \\ \Psi_0^*(x) &= \begin{bmatrix} A(\varphi_1 x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(\varphi_2 x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \Psi_1^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{B(\varphi_1 x)}{\varphi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{B(\varphi_2 x)}{\varphi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \\ \Psi_2^*(x) &= \begin{bmatrix} \frac{C(\varphi_1 x)}{\varphi_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{C(\varphi_2 x)}{\varphi_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix}; \Psi_3^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{D(\varphi_1 x)}{\varphi_1^3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{D(\varphi_2 x)}{\varphi_2^3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.143)$$

Функции  $\Psi^*$  на первый взгляд имеют другой вид нежели в (2.129), но при детальном исследовании было выяснено, что они также подчиняются закону перестановки при дифференцировании (2.130) и обладают свойствами (2.137), поэтому все выводы, которые были сделаны относительно решения в общем виде справедливы также и для рассматриваемого случая.

### Два стержня, один из которых является абсолютно жестким

Рассмотрим вариацию предыдущей задачи, а именно случай, когда имеется 2 свободных стержня, соединенных между собой упругой связью, при этом один из стержней является

абсолютно жёстким (пусть  $G_2 \rightarrow \infty$ ). В этом случае необходимо переходить от уравнений второй и третьей производной функций прогиба к функциям внутреннего момента и поперечной силы:

$$\begin{aligned}\vec{M}(x) &= G[\vec{U}''(x) - \vec{K}_0] \\ \vec{Q}(x) &= G\vec{U}'''(x)\end{aligned}\quad (2.144)$$

$$\begin{aligned}\vec{U}(x) &= \Psi_0(x)\vec{U}(0) + \Psi_1(x)\vec{U}'(0) + \Psi_2(x)G^{-1}\vec{M}(0) + \Psi_2(x)\vec{K}_0 + \\ &+ \Psi_3(x)G^{-1}\vec{Q}(0) - \sum_k \Psi_2(x-a_k)G^{-1}\vec{M}_k + \sum_n \Psi_3(x-a_n)G^{-1}\vec{P}_n \\ \vec{U}'(x) &= -\Omega\Psi_3(x)\vec{U}(0) + \Psi_0(x)\vec{U}'(0) + \Psi_1(x)G^{-1}\vec{M}(0) + \Psi_1(x)\vec{K}_0 + \\ &+ \Psi_2(x)G^{-1}\vec{Q}(0) - \sum_k \Psi_1(x-a_k)G^{-1}\vec{M}_k + \sum_n \Psi_2(x-a_n)G^{-1}\vec{P}_n\end{aligned}\quad (2.145)$$

$$\begin{aligned}\vec{M}(x) &= -G\Omega\Psi_2(x)\vec{U}(0) - G\Omega\Psi_3(x)\vec{U}'(0) + G\Psi_0(x)G^{-1}\vec{M}(0) + G(\Psi_0(x) - I)\vec{K}_0 + \\ &+ G\Psi_1(x)G^{-1}\vec{Q}(0) - \sum_k G\Psi_0(x-a_k)G^{-1}\vec{M}_k + \sum_n G\Psi_1(x-a_n)G^{-1}\vec{P}_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{Q}(x) &= -G\Omega\Psi_1(x)\vec{U}(0) - G\Omega\Psi_2(x)\vec{U}'(0) - G\Omega\Psi_3(x)G^{-1}\vec{M}(0) - G\Omega\Psi_3(x)\vec{K}_0 + \\ &+ G\Psi_0(x)G^{-1}\vec{Q}(0) + \sum_k G\Omega\Psi_3(x-a_k)G^{-1}\vec{M}_k + \sum_n G\Psi_0(x-a_n)G^{-1}\vec{P}_n\end{aligned}$$

В (2.146) записано, чему будут равны функции при константах в уравнениях (2.145) в пределе  $G_2 \rightarrow \infty$ . При подстановке (2.146) в (2.145) получаем окончательное решение (2.147).

Таким образом, были описаны все необходимые для дальнейшего построения расчетной модели случаи совместного изгиба балочных элементов, связанных распределенными по длине упругими связями (уплотнителями). При этом более целесообразным представляется использование уравнений в виде (2.145), нежели (2.139) и (2.140), так как в этом случае появляется возможность описания системы со стержнями бесконечной жесткости, а также потому, что уравнения (2.145) явным образом содержат начальную кривизну стержней (которая и является причиной деформации окна при действии температурных нагрузок), а также оперирует более привычными величинами (момент и поперечная сила).

$$\begin{aligned}
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Omega &= \mu \begin{bmatrix} \frac{1}{G_1} & -\frac{1}{G_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad G\Omega = \mu \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_0(x) &= A(\varphi x) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_0(x)G^{-1} &= \frac{1}{G_1} A(\varphi x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} G\Psi_0(x)G^{-1} &= A(\varphi x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} G(\Psi_0(x) - I) &= G_1(A(\varphi x) - 1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_1(x) &= \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_1(x)G^{-1} &= \frac{1}{G_1} \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} G\Psi_1(x)G^{-1} &= \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_2(x) &= \frac{C(\varphi x)}{\varphi^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_2(x)G^{-1} &= \frac{1}{G_1} \frac{C(\varphi x)}{\varphi^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_3(x) &= \frac{D(\varphi x)}{\varphi^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{x^3}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\lim_{G_2 \rightarrow \infty} \Psi_3(x)G^{-1} &= \frac{1}{G_1} \frac{D(\varphi x)}{\varphi^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.146}$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}(x) &= A(\varphi x) \begin{bmatrix} u_1(0) - u_2(0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} + \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} u_1'(0) - u_2'(0) \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} u_2'(0) \\ u_2'(0) \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{G_1} \frac{C(\varphi x)}{\varphi^2} \begin{bmatrix} M_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{C(\varphi x)}{\varphi^2} \begin{bmatrix} K_{01} - K_{02} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{bmatrix} K_{02} \\ K_{02} \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{G_1} \frac{D(\varphi x)}{\varphi^3} \begin{bmatrix} Q_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} - \sum_k \frac{1}{G_1} \frac{C(\varphi[x - a_k])}{\varphi^2} \begin{bmatrix} M_{k1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_n \frac{1}{G_1} \frac{D(\varphi[x - a_n])}{\varphi^3} \begin{bmatrix} P_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{U}'(x) &= -\frac{\mu}{G_1} \frac{D(\varphi x)}{\varphi^3} \begin{bmatrix} u_1(0) - u_2(0) \\ 0 \end{bmatrix} + A(\varphi x) \begin{bmatrix} u_1'(0) - u_2'(0) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_2'(0) \\ u_2'(0) \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{G_1} \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} M_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} K_{01} - K_{02} \\ 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} K_{02} \\ K_{02} \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{1}{G_1} \frac{C(\varphi x)}{\varphi^2} \begin{bmatrix} Q_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} - \sum_k \frac{1}{G_1} \frac{B(\varphi[x - a_k])}{\varphi} \begin{bmatrix} M_{k1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_n \frac{1}{G_1} \frac{C(\varphi[x - a_n])}{\varphi^2} \begin{bmatrix} P_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
\bar{M}(x) &= -\mu \frac{C(\varphi x)}{\varphi^2} \begin{bmatrix} u_1(0) - u_2(0) \\ u_2(0) - u_1(0) \end{bmatrix} - \mu \frac{D(\varphi x)}{\varphi^3} \begin{bmatrix} u_1'(0) - u_2'(0) \\ u_2'(0) - u_1'(0) \end{bmatrix} + A(\varphi x) \begin{bmatrix} M_1(0) \\ -M_1(0) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ M_1(0) + M_2(0) \end{bmatrix} + G_1 A(\varphi x) \begin{bmatrix} K_{01} - K_{02} \\ K_{02} - K_{01} \end{bmatrix} + G_1 \begin{bmatrix} K_{02} - K_{01} \\ K_{01} - K_{02} \end{bmatrix} + \\
&+ \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} Q_1(0) \\ -Q_1(0) \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1(0) + Q_2(0) \end{bmatrix} - \sum_k \left( A(\varphi[x - a_k]) \begin{bmatrix} M_{k1} \\ -M_{k1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M_{k1} + M_{k2} \end{bmatrix} \right) + \\
&+ \sum_n \left( \frac{B(\varphi[x - a_n])}{\varphi} \begin{bmatrix} P_{n1} \\ -P_{n1} \end{bmatrix} + [x - a_n] \begin{bmatrix} 0 \\ P_{n1} + P_{n2} \end{bmatrix} \right) \\
\bar{Q}(x) &= -\mu \frac{B(\varphi x)}{\varphi} \begin{bmatrix} u_1(0) - u_2(0) \\ u_2(0) - u_1(0) \end{bmatrix} - \mu \frac{C(\varphi x)}{\varphi^2} \begin{bmatrix} u_1'(0) - u_2'(0) \\ u_2'(0) - u_1'(0) \end{bmatrix} - \frac{\mu}{G_1} \frac{D(\varphi x)}{\varphi^3} \begin{bmatrix} M_1(0) \\ -M_1(0) \end{bmatrix} - \\
&- \mu \frac{D(\varphi x)}{\varphi^3} \begin{bmatrix} K_{01} - K_{02} \\ K_{02} - K_{01} \end{bmatrix} + A(\varphi x) \begin{bmatrix} Q_1(0) \\ -Q_1(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1(0) + Q_2(0) \end{bmatrix} + \sum_k \frac{\mu}{G_1} \frac{D(\varphi[x - a_n])}{\varphi^3} \begin{bmatrix} M_{k1} \\ -M_{k1} \end{bmatrix} + \\
&+ \sum_n \left( A(\varphi[x - a_n]) \begin{bmatrix} P_{n1} \\ -P_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P_{n1} + P_{n2} \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{2.147}$$

### 2.7.5 Изгиб армирующего сердечника

Изгиб армирующего сердечника от действия поперечных сил и моментов, возникающих в точках крепления «ПВХ профиль – сердечник» можно описать уравнениями (2.71) и (2.72), полученными ранее.

### 2.7.6 Использование разработанного математического аппарата на примере решения задачи об изгибе комбинации профилей в импостном притворе двухстворчатого окна

Теперь применим разработанный математический аппарат для описания конкретной задачи. Начнем с задачи об изгибе импоста симметричного двухстворчатого окна. Обратимся к рисунку 2.42. Для начала необходимо составить модель деформации профильных элементов окна. Такая модель показана на рисунке 2.42 слева, там же пунктирными линиями показано, как эта модель соотносится с реальной геометрией окна. Модель представляет собой пять стержней, соединенных друг с другом упругими уплотнителями. Левый стержень (с шарнирными опорами по краям и индексом «1») – это импост, средние два стержня с индексами «2» и «3» (см. разрез 1-1) – это профили створки, правые два стержня с индексами «4» и «5» моделируют защемленные в створках края стеклопакетов. Обратим внимание на длину стержней. Торец стержня «1» (импоста) совпадает с поверхностью внутреннего фальца профиля рамы (пунктирная линия вверху рисунка 2.42). Торец стержней «2» и «3» (створки) совпадает с линией 3 действия внутреннего уплотнителя створки (нижняя часть рисунка 2.42). Торец профиля «4» и «5» совпадает с линией 1 действия уплотнителей стеклопакета. Обратим внимание на то, что профиль рамы вместе с уплотнителем немного выступает за торец импоста (т.к. линия 3 не совпадает с поверхностью внутреннего фальца рамы), на самом деле уплотнитель в этом месте немного заходит на раму, но величина этого участка незначительная (несколько миллиметров), поэтому учитывать взаимодействие вертикального уплотнителя створки (идущего вдоль импоста) с рамой не будем. На рисунке 2.42 краевые зоны средних стержней выделены серым цветом, эти зоны (от внутреннего фальца профиля створки до линии 3) будем считать абсолютно жесткими. Последнее замечание касается уплотнителя створки. Его краевые зоны на рисунке 2.42 выделены более светлым оттенком, в этой зоне (между линиями 2 и 3) работает только внутренний уплотнитель створки (имеющий коэффициент жесткости  $\mu_4$ ), в то время как в центральной зоне совместно работают оба уплотнителя створки (с эквивалентным коэффициентом жесткости  $\mu_{e2} = \mu_3 + \mu_4$ ).

Таким образом, по длине вся стержневая система должна быть разделена на участки. Этих участков получается 7 (по три крайних с каждой стороны и центральный). На рисунке 2.42 они подписаны слева от модели. Границами между этими участками служат точки «Б»-«Ж».

В настоящем случае предполагается, что все точки крепления «ПВХ профиль – сердечник» располагаются в пределах участка 1 за исключением пары саморезов импоста, один из которых расположен на участке 2.1, другой – на участке 3.1.

На рисунке 2.42 также показано направление осей общей системы координат. При написании уравнений будут использованы местные системы координат, каждая из которых действует только в пределах своего участка (1, 2.1-2.3, 3.1-3.3). Направление осей местной системы координат совпадает с направлением осей общей системы координат, а начало местной системы координат совпадает с начальной точкой (А, Б, В, Г и т.д.) соответствующего участка.

Для того, чтобы описать изгиб системы, изображенной на рисунке 2.42 необходимо: для каждой точки-границы между участками 1-3 записать 4 уравнения (2.145), для каждой точки приложения внешней нагрузки (саморезы крепления, точки соединения с другими элементами оконной конструкции) записать по одному уравнению перемещения из (2.145), для каждой точки крепления саморезами записать уравнения перемещения для армирующих сердечников (2.71). Помимо этого, также необходимо составить уравнения равновесия и уравнения сопряжения. Такая система уравнений будет представлять собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных сил реакции в точках крепления «ПВХ профиль – сердечник», которая может быть решена матричным методом с использованием ЭВМ.

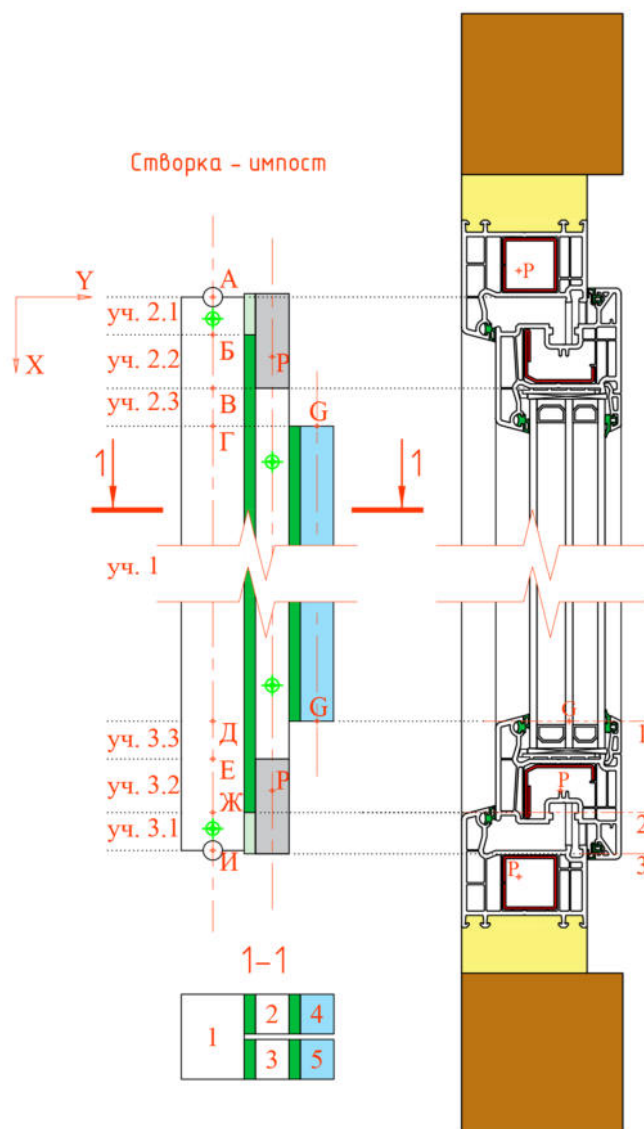


Рисунок 2.42 – Расчетная схема совместной работы импоста и примыкающих к нему элементов

Для каждого из 7-и участков расчетной модели необходимо составить свою систему уравнений. При симметричной задаче имеем:  $u_2(x) \equiv u_3(x)$  и  $u_4(x) \equiv u_5(x)$ . Для крайних участков (2.1 и 3.1) будет справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^4 u_1(x)}{dx^4} + 2 \frac{\mu_4}{G_1} [u_1(x) - u_2(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_2(x)}{dx^4} + \frac{\mu_4}{G_2} [u_2(x) - u_1(x)] = 0 \end{cases} \quad (2.148)$$

Что соответствует следующей матрице  $\Omega$ :

$$\Omega = \mu_4 \begin{bmatrix} \frac{2}{G_1} & -\frac{2}{G_1} \\ -\frac{1}{G_2} & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix} \quad (2.149)$$



Для участков 2.2-2.3 и 3.2-3.3:

$$\begin{cases} \frac{d^4 u_1(x)}{dx^4} + 2 \frac{\mu_{e2}}{G_1} [u_1(x) - u_2(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_2(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e2}}{G_2} [u_2(x) - u_1(x)] = 0 \end{cases} \quad (2.150)$$

Что соответствует следующей матрице  $\Omega$ :

$$\Omega = \mu_{e2} \begin{bmatrix} \frac{2}{G_1} & -\frac{2}{G_1} \\ -\frac{1}{G_2} & \frac{1}{G_2} \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

При этом в пределах участков 2.1-2.2 и 3.1-3.2  $G_2 \rightarrow \infty$ . Для центрального участка (1):

$$\begin{cases} \frac{d^4 u_1(x)}{dx^4} + 2 \frac{\mu_{e2}}{G_1} [u_1(x) - u_2(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_2(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e2}}{G_2} [u_2(x) - u_1(x)] + \frac{\mu_{e1}}{G_2} [u_2(x) - u_4(x)] = 0 \\ \frac{d^4 u_4(x)}{dx^4} + \frac{\mu_{e1}}{G_4} [u_4(x) - u_2(x)] = 0 \end{cases} \quad (2.152)$$

Что соответствует следующей матрице  $\Omega$ :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \frac{2\mu_{e2}}{G_1} & -\frac{2\mu_{e2}}{G_1} & 0 \\ -\frac{\mu_{e2}}{G_2} & \frac{\mu_{e1} + \mu_{e2}}{G_2} & -\frac{\mu_{e1}}{G_2} \\ 0 & -\frac{\mu_{e1}}{G_4} & \frac{\mu_{e1}}{G_4} \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

Решением всех этих систем уравнений будут функции вида (2.145). В каждой из 8-ми точек (А-И) неизвестны 4-ре векторных величины ( $\vec{U}, \vec{U}', \vec{M}, \vec{Q}$ ), что, с другой стороны, составляет 60 неизвестных скалярных величин. Этим неизвестным соответствует 60 уравнений (в случае несимметричной задачи неизвестных и уравнений будет больше):

- по 4-ре граничных условия на каждый стержень системы (3 стержня – 12 уравнений), для рассматриваемой задачи это:

$$\begin{aligned} u_1(A) = 0; u_1(I) = 0; M_1(A) = 0; M_1(I) = 0 \\ Q_2(A) = 0; Q_2(I) = 0; M_2(A) = 0; M_2(I) = 0 \\ Q_4(\Gamma) = 0; Q_4(D) = 0; M_4(\Gamma) = 0; M_4(D) = 0 \end{aligned} \quad (2.152)$$

- по 4-ре уравнения непрерывности в каждой точке, которая делит стержень на 2 части (границы выделенных участков разрезают только 1 и 2 стержень, 4 стержень полностью находится в пределах участка 1). В рассматриваемой задаче таких точек раздела 12 (Б-стержень

1, Б-стержень 2, В-стержень 1, В-стержень 2, Г-стержень 1, Г-стержень 2 и т.д.), что дает 48 уравнений вида:

$$\begin{aligned} u_i(0)_{\text{уч. } j} &= u_i(L_{j-1})_{\text{уч. } j-1} \\ u'_i(0)_{\text{уч. } j} &= u'_i(L_{j-1})_{\text{уч. } j-1} \\ M_i(0)_{\text{уч. } j} &= M_i(L_{j-1})_{\text{уч. } j-1} \\ Q_i(0)_{\text{уч. } j} &= Q_i(L_{j-1})_{\text{уч. } j-1} \end{aligned} \quad (2.153)$$

Записав такую систему из 60 линейных алгебраических уравнений относительно 60 неизвестных величин, мы уже можем описать температурный изгиб рассматриваемого участка окна, однако без учета армирующих сердечников. При наличии армирующих сердечников они воздействуют на систему ПВХ профилей посредством сил реакции, возникающих в точках крепления «ПВХ профиль – сердечник». В каждой точке крепления реакция состоит из: силы, направленной вдоль продольной оси профиля (возникает в результате неравномерной продольной температурной усадки ПВХ и металла), силы, направленной в поперечном направлении (возникает в результате разницы в начальной кривизне между ПВХ профилем и армирующим его сердечником) и момента (возникает в результате эксцентриситета приложения продольной силы реакции по отношению к нейтральной оси ПВХ профиля). Продольные силы и моменты реакции могут быть найдены отдельно, в то время как поперечные силы реакции являются частью общей системы уравнений. Таким образом к описанным выше 60 неизвестным прибавляется ещё одна группа неизвестных, количество которых в точности равно общему количеству саморезов крепления в импосте и профиле створки (при несимметричной задаче учитывается и второй профиль створки). Каждой точке крепления соответствует одно уравнение совместной деформации ПВХ профиля и сердечника:

$$u_{\text{пвх}}(x_j) = u_{\text{сердечник}}(x_j) \quad (2.154)$$

Перемещение и прогиб крайней точки  $i$ -го сердечника находится из двух условий равновесия сил и моментов реакции, действующих на этот сердечник.

Последним необходимым условием будет условие взаимодействия профиля рамы и створки через запирающий механизм (цапфы-ответные планки), в точке передачи усилия через  $j$ -ю цапфу на ответную планку будет действовать уравнение:

$$u_{\text{створка}}(x_j) - u_{\text{рама/импост}}(x_j) = \delta_j \quad (2.154)$$

где  $\delta_j$  – «натяжение» цапфы,  $m$  – начальное локальное обжатие уплотнителя, к которому приводит запирание. В современных оконных конструкциях этот параметр регулируется путем поворота овальной цапфы вокруг своей оси («зимний» и «летний» режимы запирания). Также нужно

отметить, что связь, которую образуют цапфы, имеет однонаправленный характер, т.е. она выключается, если сворка под действием внешних сил вдавливается (локально) в раму на расстояние, превышающее  $\delta_j$ .

Таким образом будет составлена полная система линейных алгебраических уравнений, которая позволит описать изгиб системы, изображенной на рисунке 42, с учетом армирующих сердечников.

Дальнейшее уточнение расчетной модели состоит в том, чтобы описанным выше образом записать систему уравнений для остальных узлов оконной конструкции (в симметричной задаче помимо импоста: створка-рама вверху, створка-рама внизу, створка-рама сбоку). Далее необходимо объединить эти отдельные системы уравнений в одну, связав их условиями совместной деформации различных профилей в точках их соединения друг с другом (в случае обычного двухстворчатого окна – это углы оконной конструкции), и таким образом, получить решение для температурных деформаций всей оконной конструкции целиком.

## 2.8 Критерий ограничения деформаций оконных конструкций

В настоящее время жесткость элементов оконных конструкций подбирается из условия ограничения прогиба импоста:

$$f_m \leq f_{\max} \quad (2.155)$$

где  $f_m$  – фактический прогиб импоста, м;  $f_{\max}$  – предельный прогиб импоста, принимаемый равным 1/150, 1/200, либо 1/300 длины импоста в зависимости от типа окна.

Как уже было сказано в разделе 1.1 настоящей работы, критерием для ограничения прогибов оконной конструкции является сохранение её герметичности. Герметичность оконной конструкции в первую очередь определяется работой оконного уплотнителя, а не прогибами её отдельных элементов. Использование условия (2.155) было связано с отсутствием возможности прямого расчета степени обжатия оконного уплотнителя в процессе деформации окна. Представленный в разделе 2.7 настоящей работы метод расчета НДС оконных конструкций дает такую возможность. В виду этого видится рациональным отойти от опосредованной формулировки ограничения прогибов оконной конструкции и использовать для этих целей именно деформации оконного уплотнителя:

$$s_{\min} \leq s(x) \quad (2.155)$$

$s(x)$  – функция сжатия уплотнителя, м;  $s_{\min}$  – минимально допустимая степень сжатия уплотнителя, м;

Минимально допустимая степень сжатия уплотнителя  $s_{min}$  устанавливается в рекомендациях системодателя и зависит от типа уплотнителя, его размера и формы поперечного сечения. В большинстве случаев она варьирует от 1.5 до 3 мм. На рисунке 2.43 показаны требуемые минимальные величины обжатия оконных уплотнителей некоторых типов, применяемых в оконных системах VEKA [40].

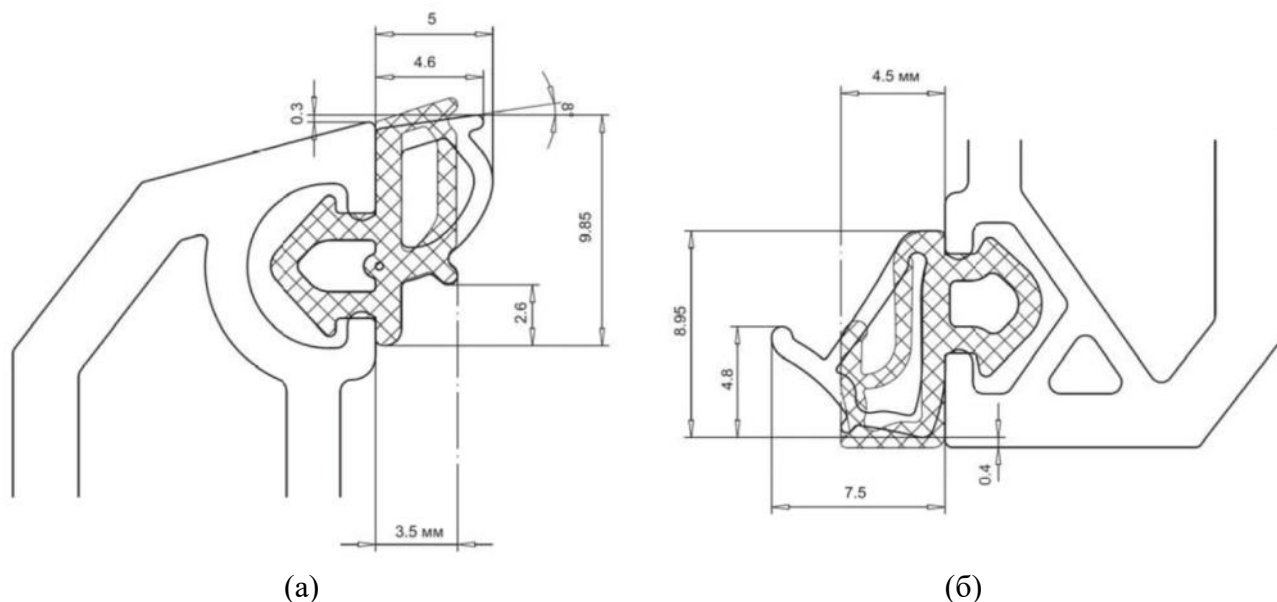


Рисунок 2.43 – Минимальная степень обжатия оконного уплотнителя [40]:

*a* – наружный уплотнитель, устанавливаемый на створку или раму; *б* – внутренний уплотнитель, устанавливаемый на створку

## 2.9 Выводы к 2 главе

1. Результаты численного моделирования температурного поля ПВХ окна в зимнем режиме эксплуатации показали, что температурное поле в поперечном сечении ПВХ профилей может быть с достаточной точностью описано одномерной функцией температуры от координаты  $Y$ , направленной вдоль основного градиента температуры. При этом характер распределения температуры в поперечном сечении армированного ПВХ профиля отличается от линейного и является трехчастным: основной перепад температуры происходит во внутренней и наружной частях ПВХ профиля, в центральной части ПВХ профиля, где располагается стальной сердечник, температурный перепад почти отсутствует.

2. Была предложена методика аналитического расчета температурного поля в армированных ПВХ профилях. Результаты расчета по предложенной методике сходятся с результатами компьютерного моделирования.

3. Было дано аналитическое описание напряженно-деформированного состояния стержня, в поперечном сечении которого установлено нелинейное, трехчастное температурное

поле. Получены уравнения, позволяющие определить положение нейтральной оси такого стржня, его эквивалентный момент инерции, эквивалентную площадь, а также кривизну и коэффициент продольной деформации (с учетом внешних нагрузок). Показано, что классические формулы строительной механики, описывающие температурный изгиб балочного элемента при линейном распределении температуры в его поперечном сечении, не в состоянии корректно описать температурный изгиб армированного ПВХ профиля: погрешность в определении начальной кривизны профиля, полученной по классической формуле, составила 29.3% (для рассмотренного примера), также в профиле из-за нелинейного характера температурного поля возникают внутренние самоуравновешенные напряжения, которые классическая теория строительной механики предсказать не может. Корректность полученных результатов была подтверждена путем их сопоставления с результатами 3D моделирования температурного изгиба ПВХ профиля.

4. Предложена расчетная модель совместной механической работы ПВХ профиля и стального сердечника при температурных нагрузках и получены аналитические уравнения, описывающие эту расчетную модель. Уравнения позволяют: определить продольные и поперечные компоненты усилий, возникающие в точках крепления армирующего сердечника к ПВХ профилю, учесть эксцентриситеты точек крепления по отношению к нейтральным осям ПВХ профиля и сердечника, учесть условия крепления ПВХ профиля. Результаты расчета тестовой задачи об изгибе армированного ПВХ профиля по предложенным формулам был сопоставлен с результатами компьютерного 3D моделирования. Разница составила 4.8%.

5. Было доказано, что игнорирование физической нелинейности ПВХ не приводит к существенным погрешностям при расчете температурных деформаций элементов оконной ПВХ конструкции при зимних условиях эксплуатации.

6. Предложена расчетная модель для описания совместной механической работы смежных элементов ПВХ окна (комбинации профилей), усилия между которыми передаются посредством упругих связей (оконного уплотнителя), распределенных по длине этих элементов, и через запорные механизмы. Было найдено аналитическое решение общего вида для системы дифференциальных уравнений, описывающей работу данной модели, а также рассмотрены некоторые частные случаи (свободные профили, бесконечно-жесткие профили, наличие сосредоточенных сил и моментов).

7. Предложено упрощение, которое позволит учитывать влияние стеклопакета на механическую работу окна в целом. Оно заключается в предположении, что в краевой зоне стеклопакета все его точки (в выбранном сечении) имеют одинаковое перемещение в направлении оси  $Y$  (перпендикулярно остеклению) при приложении к стеклопакету нагрузки, действующей по оси  $Y$  в пределах краевой зоны. При этом деформация кромки стеклопакета от

такой нагрузки подобна деформации балочного элемента с некой эквивалентной изгибной жёсткостью  $G_{glass}$ . Данную величину ( $G_{glass}$ ) можно назвать эквивалентной жесткостью кромки (или краевой зоны) стеклопакета.

8. На примере комбинации профилей импостного притвора была продемонстрирована методика составления основной системы линейных алгебраических уравнений для описания механической работы взаимодействующих друг с другом элементов оконной конструкции. С использованием описанной методики возможно вести расчет механической работы ПВХ окна в целом, как многокомпонентной конструкции. При этом будут учтены: температурные деформации ПВХ профилей и стеклопакета, жесткость стеклопакета, взаимодействие ПВХ профилей через упругие уплотнители, взаимодействие ПВХ профилей через запорные механизмы, сосредоточенные силы и моменты, действующие на оконную конструкцию, наличие армирующих сердечников.

9. Был сформулирован критерий ограничения величины температурных деформаций оконных конструкций из ПВХ профилей, который заключается в ограничении степени обжатия уплотняющего контура оконной конструкции диапазоном его нормальной работы, устанавливаемого производителем уплотнителя. Для большинства EPDM уплотнителей, используемых в оконных конструкциях, рекомендуемое минимальное обжатие составляет от 1.5 до 3 мм. Если в следствие деформаций оконной конструкции фактическая степень обжатия уплотнителя окажется меньше минимальной, произойдет нарушение его герметичности.

### ГЛАВА 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОКОННЫХ ПВХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ КЛИМАТИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

#### 3.1 Методика проведения экспериментальных исследований

Для проведения эксперимента были выбраны образцы оконных блоков, характеристики и конфигурация которых описана в таблице 3.1. Чертежи указанных в таблице 3.1 оконных блоков представлены в приложении А.1.

Таблица 3.1 – Образцы для выполнения испытаний

Оконный блок	Конфигурация	Обозначение
Veka SoftLine 70 AD размером 1749x1749 мм	Две поворотно-откидные створки со стеклопакетом 4-16-4-14-4	SL70-18-C
	Обе створки сняты, в оконную раму установлено глухое заполнение из сэндвич-панелей толщиной 40 мм	SL70-18-P
Veka SoftLine 70 AD размером 1348x1348 мм	Две поворотно-откидные створки со стеклопакетом 4-16-4-14-4	SL70-14-C
	Обе створки сняты, в оконную раму установлено глухое заполнение из сэндвич-панелей толщиной 40 мм	SL70-14-P
Veka SoftLine 82 MD размером 1749x1750 мм	Две поворотно-откидные створки со стеклопакетом 4-16-4-16-4	SL82-18-C
	Обе створки сняты, в оконную раму установлено глухое заполнение из сэндвич-панелей толщиной 40 мм	SL82-18-P
	Обе створки сняты, в оконную раму установлено глухое заполнение из сэндвич-панелей толщиной 40 мм. Из ПВХ профиля импоста выкручены все саморезы крепления стального сердечника кроме центрального.	SL82-18-P1
Veka SoftLine 82 MD размером 1339x1339 мм	Две поворотно-откидные створки со стеклопакетом 4-16-4-16-4	SL82-14-C
	Обе створки сняты, в оконную раму установлено глухое заполнение из сэндвич-панелей толщиной 40 мм	SL82-14-P

Каждый оконный блок монтировался в деревянную раму, изготовленную из клееного бруса сечением 90x90 мм, с обеспечением ширины монтажного зазора 25 мм (подставочный профиль не использовался). При монтаже наружная поверхность оконной рамы выравнивалась заподлицо с внешней поверхностью деревянной рамы. Монтаж осуществлялся с учётом требований ГОСТ 30971 с использованием шурупов по дереву 6x140 (глубина заделки в древесину 70 мм), пластиковых несущих и дистанционных колодок и монтажной пены. С

уличной стороны монтажный шов закрывался паропроницаемой лентой. После затвердевания монтажной пены её излишки срезались строительным ножом. С внутренней стороны монтажный шов оставался открытым. Чертежи оконных блоков в смонтированном положении представлены в приложении А.2. На рисунке 3.1 показан процесс монтажа оконного блока в деревянную раму.



Рисунок 3.1 – Монтаж оконного блока SL70-14 в деревянную раму

Деревянная рама с смонтированным в ней оконным блоком устанавливалась на испытательный стенд KS 3025/650 (описание применяемого оборудования см. таблицу 3.2). После монтажа и крепления рамы на стенде производилась установка:

- линейных датчиков перемещения;
- датчиков температуры;
- датчиков теплового потока;

Схема расстановки датчиков для каждой из конфигураций испытания показана в приложении А.3. На рисунке 3.2 показан оконный блок SL70-18С, установленный в деревянной раме на испытательный стенд.





Рисунок 3.2 – Оконный блок SL70-18, установленный на испытательный стенд после монтажа всех датчиков

После завершения подготовительных работ проводилась серия испытаний, которая состояла из двух этапов:

- Определялись перемещения оконной конструкции при действии ветровой нагрузки. При этом отверстия для установки ручек на створках герметизировались скотчем. Сначала образец подвергался воздействию положительной ветровой нагрузки в диапазоне от 0 до +900/+1000/+1100 Па (в зависимости от образца). После проведения испытания на положительную нагрузку образец выдерживался 10 минут без нагрузки, после чего проводилось испытание на отрицательную ветровую нагрузку в диапазоне от 0 до -900/-1000/-1100 Па (в зависимости от образца). При этом ветровая нагрузка прикладывалась ступенчато с шагом  $\pm 100$  Па. На каждой ступени образец выдерживался как минимум 10 с, после чего фиксировались показания датчиков перемещения.



- После проведения испытаний на ветровую нагрузку образец подвергался испытанию на действие температуры. Для этого в замкнутой камере испытательного стенда (в которую образец повернут уличной стороной) устанавливалась отрицательная температура. При этом непрерывно контролировались: температура воздуха внутри замкнутой камеры, температура воздуха в лаборатории, температура на внутренней и наружной поверхности ПВХ профилей окна и оконного заполнения, тепловые потоки на внутренней поверхности оконных профилей и оконного заполнения. Образец выдерживался при включенной системе охлаждения до тех пор, пока не был зафиксирован стационарный тепловой режим, после чего производилась запись показаний всех датчиков (температуры, потока и линейного перемещения). Данная процедура проводилась последовательно (без разморозки образца) для температур минус 27°C, минус 17°C и минус 7°C (фактические значения отрицательных температур, установившихся в холодной

камере в каждом конкретном случае, несколько отличаются от указанных, что связано с особенностями работы системы охлаждения).

Таблица 3.2 – Описание применяемого оборудования

<b>Испытательный стенд KS 3025/650</b>		
<b>Фото</b>		<b>Описание</b>
		<p>Оборудование предназначено для проведения сертификационных испытаний оконных и дверных блоков для оценки соответствия продукции требованиям ГОСТ 30674-99, ГОСТ 23166-99: проведения испытаний на воздухопроницаемость, водонепроницаемость, ветровое сопротивление, сопротивление теплопередаче. Оборудование позволяет наблюдать деформацию оконных блоков под воздействием температуры и ветрового давления.</p>
<b>Измерительный комплекс ТЕРЕМ-4</b>		
<b>Компонент</b>	<b>Фото</b>	<b>Описание</b>
Регистрирующее устройство		<p>Комплекс ТЕРЕМ-4 предназначен для длительного мониторинга состояния сложных технических объектов (зданий, сооружений, мостов, строительных конструкций), технологических процессов и других применений. Данные измерительный комплекс обеспечивают сбор и регистрацию во времени показаний датчиков различных физических величин:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-линейных и угловых перемещений,</li> <li>-тепловых потоков,</li> <li>-влажности,</li> <li>-температуры</li> </ul>

Продолжение таблицы 3.2

Компонент	Фото	Описание
Измерительные модули		<p>Датчики перемещения подключаются к измерительным модулям, которые, в свою очередь, передают информацию на регистрирующее устройство.</p>
Датчики перемещения		

## Окончание таблицы 3.2

<b>Измерительный комплекс «Поток»</b>	
Фото	Описание
	<p>Измерители плотности теплового потока и температуры ИТП-«Поток» предназначены для измерений плотности теплового потока, проходящего через теплообменные поверхности теплоэнергетических объектов, а также температур таких поверхностей и (или) окружающих их газообразных и сыпучих сред. ИТП-«Поток» состоит из программируемых десятиканальных неавтономных модулей и электронного блока, предназначенного для программирования и сбора информации, накопленной модулями. В комплект прибора может входить до десяти модулей различного назначения.</p>
<b>Фотокамеры Canon Powershot SX210 IS</b>	
Фото	Описание
	<p>Цифровые фотокамеры с максимальным разрешением фотоснимков 14.1 МР с возможностью ручной настройки фокусировки и экспозиции.</p>

### 3.2 Анализ результатов экспериментальных исследований

Испытания на ветровую нагрузку проводились, в первую очередь для того, чтобы изучить характер работы узлового соединения импоста с рамой. В настоящее время действует предположение, что узел крепления импоста к раме является шарнирным. На этом

предположении базируется методика подбора требуемой жесткости армирующего сердечника импоста окна, приведенная в ГОСТ Р 56926-2016. Для проверки справедливости этого предположения результаты испытаний на ветровую нагрузку для образцов SL70-18P, SL82-18P и SL82-14P (в которых створки были заменены на сэндвич-панели и были созданы условия для «чистой» механической работы импостов) были сопоставлены с результатами численного расчета прогиба импостов этих окон в программе COMSOL Multiphysics®. При расчете была учтена фактическая геометрия ПВХ профилей импостов и армирующих сердечников, использовались следующие граничные условия: шарнирное закрепление на торцевых поверхностях ПВХ профиля (условие Rigid Connector в постановке Flexible [95]), шарнирные условия взаимодействия между парами смежных отверстий, «просверленных» в ПВХ профиле и сердечнике в местах установки саморезов (при помощи Cylindrical Joint интерфейса Multibody Dynamics [93] с запретом на перемещение по оси шарнира), распределенная на внешнюю поверхность импоста нагрузка, вид и значение которой определялось согласно рисунку 3.4. Расчет производился для значений ветровой нагрузки 300, 600, 900 Па. Исходные данные расчета для каждого из образцов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Исходные данные для расчетов прогиба импоста

Параметр	SL70-18P (без створок)	SL82-18P (без створок)	SL82-14P (без створок)
$I_p, \text{см}^4$	62.702	106.13	
$I_r, \text{см}^4$	2.4441	3.8786	3.8314
Толщина стенки армирования, мм	1.64	2.93	2.88
L, мм	1663	1660	1249
$x_{sc}, \text{мм}$	27; 249; 537; 829; 1112; 1407; 1636;	158; 395; 613; 836; 1077; 1333; 1546;	151; 380; 631; 836; 1070;
$E_p, \text{МПа}$	2700		
$E_r, \text{МПа}$	200000		
Условия крепления ПВХ профиля на концах	шарнирные		
Примечания: $I_p$ – моменты инерции ПВХ профиля импоста; $I_r$ – момент инерции армирующего сердечника; L – длина импоста; $x_{sc}$ – координата точек расположения саморезов крепления ПВХ профиля импоста к армирующему сердечнику (считая от торца ПВХ профиля);			

Пример деформированной схемы импоста, полученной при проведении расчета в программе COMSOL показана на рисунке 3.5. Сравнение результатов расчета с результатами эксперимента для всех рассматриваемых образцов приведено в таблице 3.4.

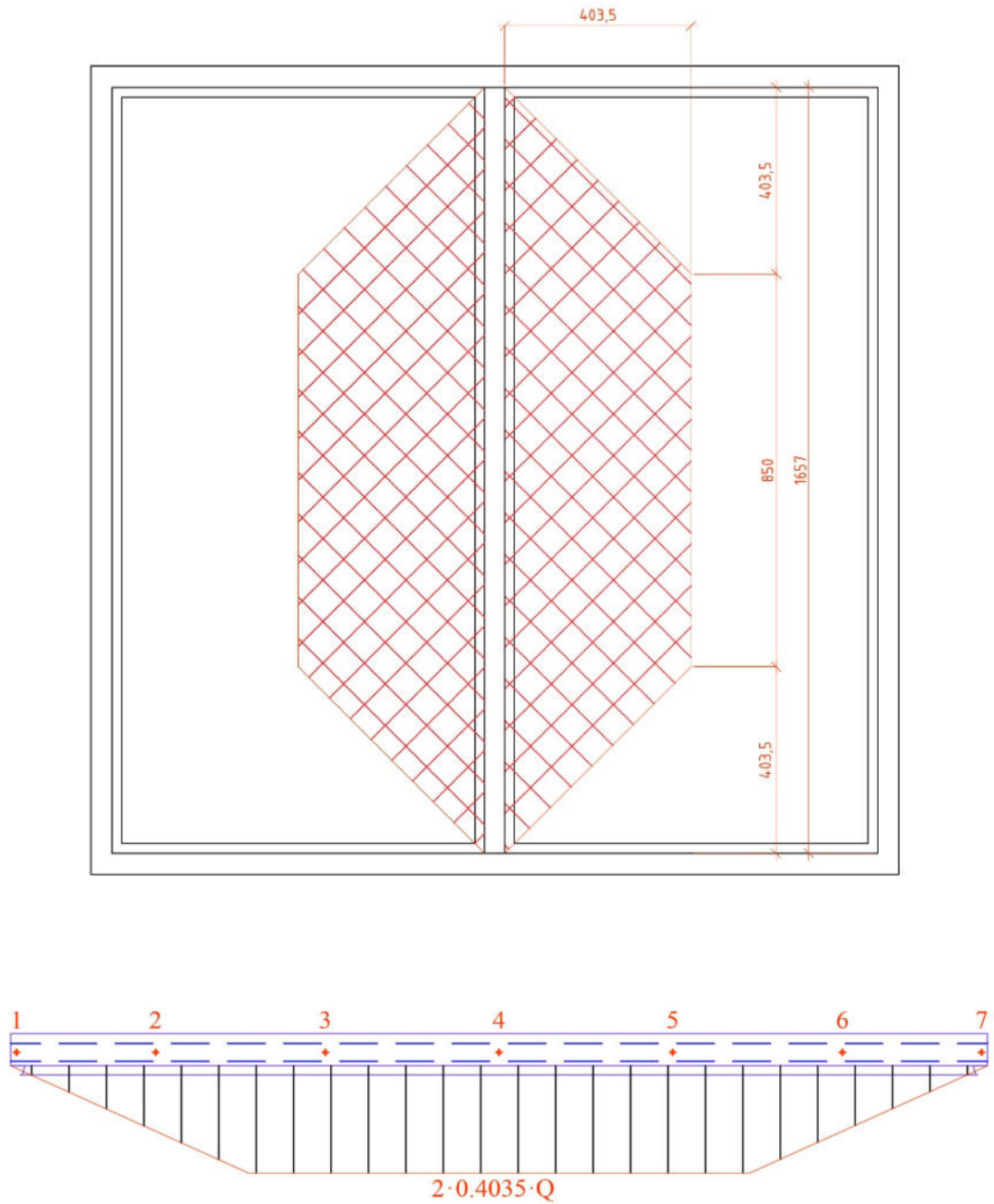


Рисунок 3.4 – Сбор ветровой нагрузки, действующей на импост на примере образца SL70-18P (без створок): вверху – грузовая площадь импоста окна, внизу – вид и значение распределенной по длине импоста нагрузки ( $Q$  – величина ветровой нагрузки, Па)

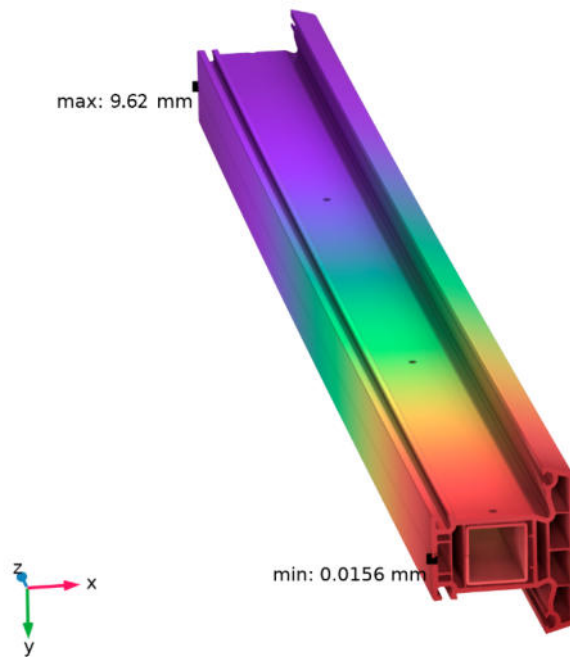


Рисунок 3.5 – Деформированная схема импоста на примере образца SL70-18P (без створок), полученная по результатам расчета в программе COMSOL для  $Q=900$  Па (показана половина импоста)

Таблица 3.4 – Сопоставление результатов расчета прогиба импостов при шарнирном закреплении с результатами эксперимента

Окно	$\Delta P$ , Па	Расчет в программе COMSOL		Прогиб по результатам эксперимента, мм
		Прогиб, мм	Относительная погрешность, %	
SL70-18P (без створок)	300	3.21	26.4	2.54
	600	6.41	20.3	5.33
	900	9.62	28.3	7.50
SL82-18P (без створок)	300	2.13	23.8	1.72
	600	4.25	37.1	3.10
	900	6.37	33.8	4.76
SL82-14P (без створок)	300	0.56	12.0	0.50
	600	1.13	11.9	1.01
	900	1.69	13.4	1.49

Как видно из таблицы 3.4 результат расчета всегда больше фактического прогиба. Такое расхождение объясняется тем, что в действительности в узле соединения импоста с рамой возникает момент, препятствующий прогибу импоста. О наличии момента, который передается с импоста на раму, свидетельствует тот факт, что профиль рамы в месте крепления импоста испытывает деформации кручения, зафиксированные датчиками перемещения. Данный эффект проявляется как при ветровой нагрузке (рисунок 3.6), так и при температурной нагрузке (рисунок 3.7), при которой отсутствуют горизонтальные усилия, действующие на окно.

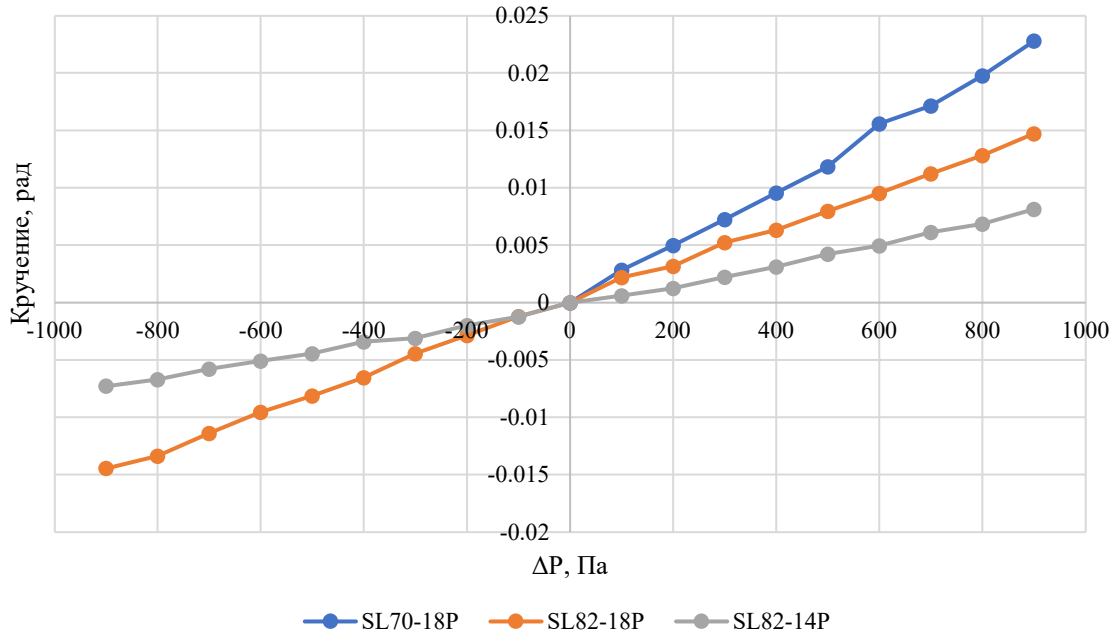


Рисунок 3.6 – Угол поворота поперечного сечения верхнего профиля рамы вокруг его продольной оси (кручение) в месте соединения с импостом в зависимости от ветровой нагрузки

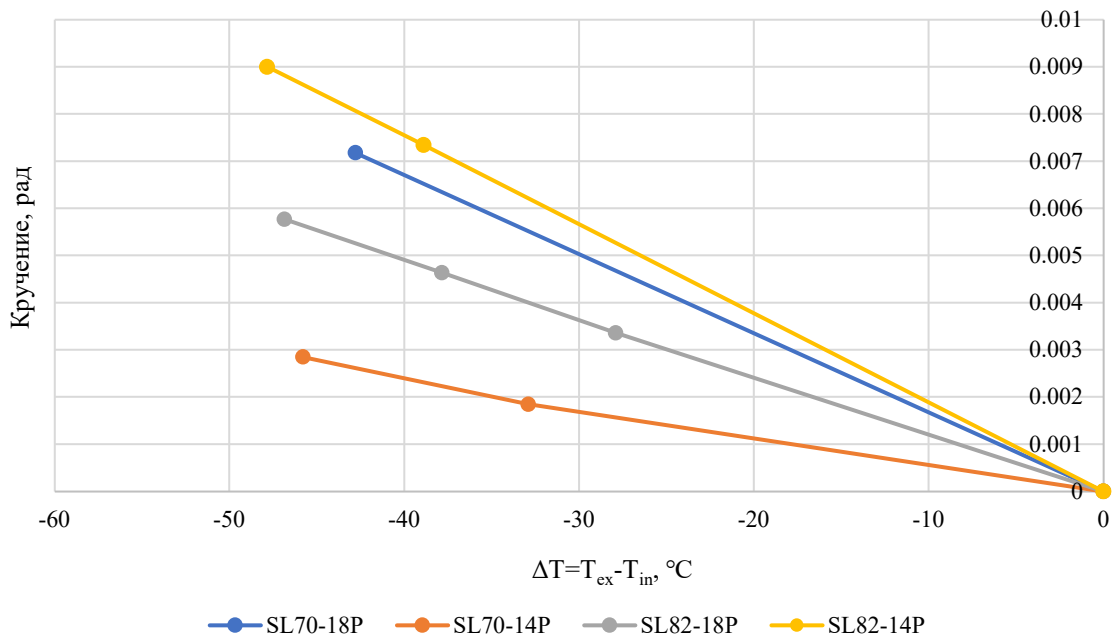


Рисунок 3.6 – Угол поворота поперечного сечения верхнего профиля рамы вокруг его продольной оси (кручение) в месте соединения с импостом в зависимости от температурной нагрузки

Учесть реальные условия закрепления профиля импоста возможно путем введения функции  $m(\theta)$ , которая является механической характеристикой узла соединения «импост-рама» и определяет величину момента реакции в узле в зависимости от угла поворота импоста. Вид этой функции зависит: от конструктивного решения узла крепления «импост-рама», от



крутильной жесткости профиля рамы, от условий крепления профиля рамы к строительному основанию.

Функцию  $m(\theta)$  для рассмотренных в эксперименте случаев возможно найти путем решения обратной задачи: из условия совпадения данных расчета с данными эксперимента на каждом этапе нагрузки. Таким образом значения  $m(\theta)$  были определены для образцов SL70-18P, SL82-18P и SL82-14P при  $\Delta P = 100 \dots 900$  Па (таблица 3.5).

Таблица 3.5 – Результат определения величин  $m(\theta)$

Окно	$\Delta P$ , Па	Результат расчета			Результат экспериментального определения прогиба импоста, мм
		Момент реакции $m$ , Н·м	Угол поворота ПВХ профиля на опоре $\theta$ , рад	Прогиб импоста $f$ , мм	
SL70-18P (без створок)	100	2.72	0.0016191	0.93	0.93
	300	13.063	0.0040866	2.54	2.54
	500	24.383	0.0064002	4.10	4.10
	700	34.526	0.0088987	5.72	5.72
	900	41.527	0.011891	7.50	7.50
SL82-18P (без створок)	100	0	0.0015817	0.71	0.72
	300	10.946	0.0032756	1.72	1.72
	500	25.906	0.0044306	2.58	2.58
	700	34.149	0.0064871	3.69	3.69
	900	43.489	0.0083965	4.76	4.76
SL82-14P (без створок)	100	1.944	0.0003521	0.14	0.14
	300	2.612	0.0014290	0.50	0.50
	500	3.673	0.0024604	0.85	0.85
	700	4.744	0.0034906	1.20	1.20
	900	8.230	0.0042415	1.49	1.49

На рисунке 3.7 функция  $m(\theta)$  показана в виде графика. Как видно, зависимость  $m(\theta)$  является почти линейной для образцов SL70-18P и SL82-14P, в то время как для образца SL82-18P наблюдается сначала шарнирный поворот (без момента), после чего узел включается в работу. Для упрощения расчетов, представленные графики можно аппроксимировать линейными зависимостями (также показаны на рисунке 3.7). Коэффициент пропорциональности будет при этом выступать в качестве коэффициента жесткости узла  $k_\theta$  Н·м/рад. Он равен:

- для образца SL82-18P – 5069.4 Н·м/рад;
- для образца SL82-14P – 1690.9 Н·м/рад;
- для образца SL70-18P – 3613.4 Н·м/рад;

Для учёта условий полужесткого защемления импоста на опоре в систему уравнений, описывающую изгиб армированного ПВХ профиля, необходимо добавить два граничных условия:

$$\begin{aligned} M_0 &= k_\theta \theta(0) \\ M_{m+1} &= -k_\theta \theta(x_{m+1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Знаки в уравнении (3.1) выбраны таким образом, чтобы возникающие моменты реакции в опорах были направлены против действия внешней нагрузки.

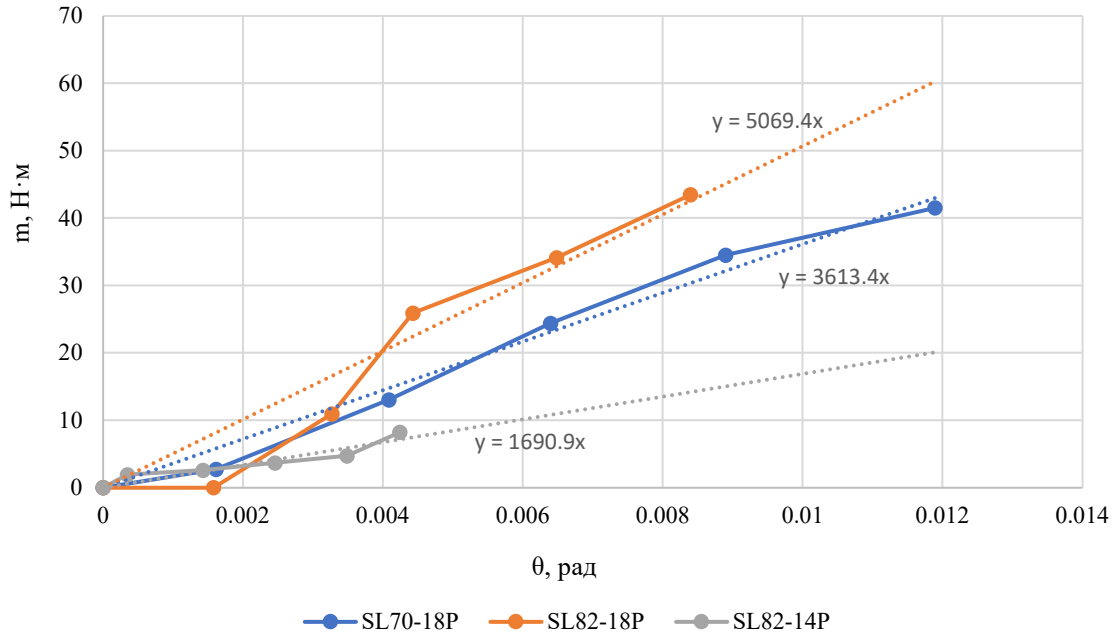


Рисунок 3.7 – Зависимость момента реакции в узле соединения импоста с рамой от угла поворота импоста

По методике расчета температурных деформаций армированных ПВХ профилей, описанной в главе 2, был произведен расчет прогиба импоста для образцов SL70-14P, SL70-18P, SL82-14P и SL82-18P при различных температурных нагрузках. Исходные данные расчета представлены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Исходные данные для расчета температурного прогиба импостов

Параметр	SL70-18P (без створок)	SL70-14P (без створок)	SL82-18P (без створок)	SL82-14P (без створок)
$I_p, \text{см}^4$	62.702		106.13	
$A^I, A^{II}, A^{III}, \text{см}^2$	2.789; 1.663; 5.686		3.3357; 1.7682; 8.2167	
$S_z^I, S_z^{II}, S_z^{III}, \text{см}^3$	-9.773; -1.438; 11.286		-13.859; -2.658; 16.608	
$I_z^I, I_z^{II}, I_z^{III}, \text{см}^4$	35.013; 2.746; 24.946		58.628; 5.615; 41.898	
Толщина стенки армирования, мм	1.64		2.93	2.88
$I_r, \text{см}^4$	2.4441		3.8786	3.8314
$A_r, \text{см}^2$	1.8329		3.1533	3.1049
L, мм	1663	1262	1660	1249

Окончание таблицы 3.6

Параметр	SL70-18P (без створок)			SL70-14P (без створок)		SL82-18P (без створок)			SL82-14P (без створок)	
$x_{sc}$ , мм	27; 249; 537; 829; 1112; 1407; 1636;			27; 250; 504; 760; 1008; 1225		158; 395; 613; 836; 1077; 1333; 1546;			151; 380; 631; 836; 1070;	
$e_1$ , мм	3.6			5.1		0			0	
$e_2$ , мм	-6.5			-4.5		-15.9			-15.9	
$R_I/R_{III}$	1					2/3				
$R_0$ , м <sup>2</sup> ·°C/Вт*	0.740					0.627			0.734	
$T_{ex}$ , °C*	-27	-16	-6.3	-25.2	-11.8	-26	-17	-7.2	-25.6	-16.7
$T_{in}$ , °C*	18.5	19.6	19.7	20.6	21.1	21	21	21	22.2	22.2
$\tau_1$ , °C*	13.8	15.6	16.5	-	-	14.9	15.5	16.7	15.8	16.8
$\tau_4$ , °C*	-24.0	-13.2	-4.2	-	-	-22.8	-13.7	-4.4	-22.6	-13.4
$\alpha_{pvc}$ , °C <sup>-1</sup>	1.23·10 <sup>-5</sup>									
$\alpha_s$ , °C <sup>-1</sup>	7·10 <sup>-5</sup>									
$E_p$ , МПа	2700									
$E_r$ , МПа	200000									
Условия крепления	Полужесткие с коэффициентом жесткости 3613.4 Н·м/рад			Полужесткие с коэффициентом жесткости 3613.4 Н·м/рад		Полужесткие с коэффициентом жесткости 5069.4 Н·м/рад			Полужесткие с коэффициентом жесткости 1690.9 Н·м/рад;	
Примечания: * значения являются результатами экспериментальных замеров										

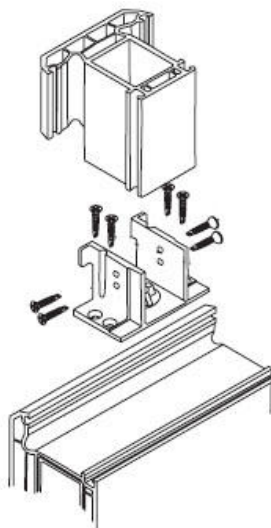
Результаты расчета, а также их сопоставление с экспериментальными данными представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Результаты расчета прогиба импостов от температурной нагрузки

Образец	$T_{ex}$ , °C	$K_0$ , 1/м	$k_{ax0}$	$\tau_2$ , °C	$f_{расч}$ , мм	$f_{эксп}$ , мм	$\epsilon$ , %
SL70-18P (без створок)	-27	0.03037	0.998065582	-5.1	2.95	4.57	-35.4
	-16	0.02296	0.998523161	1.20	2.17	3.57	-39.2
	-6	0.01647	0.998914994	6.15	1.57	2.73	-42.5
SL70-14P (без створок)	-25	0.02977	0.998186773	-2.93	1.57	1.95	-19.5
	-12	0.02132	0.998744477	4.20	1.11	1.32	-15.9
SL82-18P (без створок)	-26	0.02755	0.998134548	-0.18	3.01	3.85	-21.8
	-17	0.02130	0.998516808	3.82	2.36	2.92	-19.2
	-7.2	0.01537	0.998924971	8.26	1.70	2.02	-15.8
SL82-14P (без створок)	-26	0.02806	0.998169522	0.44	2.24	2.69	-16.7
	-17	0.02203	0.998567782	4.72	1.76	2.15	-18.1

Как видно из таблицы 3.7 средняя погрешность расчета по всем рассмотренным случаям составляет 25%. Такая погрешность объясняется особенностями условий крепления ПВХ профиля импоста к оконной раме. На рисунке 3.8 показаны решения данного узла для систем

SL70 и SL82. В обоих случаях он выполнен с использованием металлического узлового элемента (соединителя), который четырьмя саморезами (по 2 с каждой стороны) крепится к профилю рамы, а четырьмя (по 2 с каждой стороны) – к профилю импоста. Главное отличие между системами SL70 и SL82 заключается в том, что в SL70 саморезы, которыми узловой элемент крепится к импосту, располагаются сбоку и проходят сквозь стальной сердечник, а в SL82 они располагаются с торца импоста (поэтому не видны на рисунке 3.8б) и крепятся в каналы ПВХ профиля импоста, при этом не проходят сквозь стальной сердечник. Это приводит к различиям в механической работе узлов крепления при зимней температурной нагрузке. В результате понижения температуры в поперечном сечении импоста он укорачивается, и в узле крепления «импост-рама» возникает усилие, направленное вдоль оси импоста и стремящееся выдернуть его из узла. Узел окна SL70 имеет большую жесткость по отношению к данному выдергивающему усилию, поскольку саморезы импоста в нем закреплены в стальной сердечник, в то время как в окне SL82 – только в ПВХ (модуль упругости которого на порядки ниже, чем у стали). В итоге в окне SL70 описанное выдергивающее усилие значительно больше, чем в окне SL80, что приводит к деформации стенки профиля рамы, к которой прикреплен узловой элемент, и уменьшению усилий контактного взаимодействия между ними. В результате данный узел начинает работать шарнирно (поскольку момент, передающийся с узлового элемента на раму, передается как раз через площадку контакта между ними), в то же время в окне SL82 данного эффекта не происходит.



а



б

Рисунок 3.8 – Узел крепления импоста к раме: а – в системе SL70, б – в системе SL82

Таким образом, при расчете температурного прогиба импоста SL70-18 необходимо рассматривать его как шарнирно закрепленный. То же необходимо сказать и об образце SL70-14, однако вскрытие узлов примыкания импоста к раме в этом образце показало, что с одной стороны импоста произошло нарушение условий крепления из-за слишком короткого стального

сердечника: боковые саморезы не прорезают сердечник, а крепятся только в стенку ПВХ профиля (рисунок 3.9), в виду чего жесткость данного узла многократно снижается и в данном образце также не будет наблюдаться описанного выше эффекта.

Было объяснено возникновение погрешности при расчете температурного прогиба для образца SL70-18P. В остальных образцах условия крепления импоста к раме должны быть те же, что и при испытаниях на ветровую нагрузку, при этом все равно видны довольно большие расхождения результатов расчета с экспериментом. Это объясняется использованием линейной зависимости момента реакции в узле крепления импоста от угла его поворота  $m(\theta)$ , коэффициент пропорциональности в которой был определен усреднением данных для широкого диапазона значений  $\theta$ . Если вновь обратиться к рисунку 3.7, то можно увидеть, что такое осреднение для некоторых углов поворота дает значения  $m$ , значительно отклоняющиеся от фактической кривой  $m(\theta)$ .

С учетом всего вышесказанного был произведен повторный расчет температурного прогиба импоста для 4-х образцов: для образца SL70-18P были использованы шарнирные условия крепления, для остальных образцов линейная функция  $m(\theta)$  была заменена фактической, изображенной ломанными графиками на рисунке 3.7 (для образца SL70-14 использовалась функция  $m(\theta)$ , определенная по образцу SL70-18). Результаты нового расчета представлены в таблице 3.8.



Рисунок 3.9 – Нарушение условий крепления узлового элемента импоста в образце SL70-18

Таблица 3.8 – Расчет прогиба импоста с учетом скорректированной постановки задачи

Образец	$T_{ex}, ^\circ C$	$f_{расч}, мм$	$f_{исп}, мм$	$\epsilon, \%$
SL70-18P (без створок)	-27	4.43	4.57	-3.1
	-16	3.35	3.57	-6.2
	-6	2.43	2.73	-11.0
SL70-14P (без створок)	-25	1.88	1.95	-3.6
	-12	1.35	1.32	2.3
SL82-18P (без створок)	-26	3.79	3.85	-1.6
	-17	2.91	2.92	-0.3
	-7.2	2.11	2.02	4.5
SL82-14P (без створок)	-26	2.53	2.69	-5.9
	-17	1.96	2.15	-8.8

Как видно из таблицы 3.8 использование фактического вида функции  $m(\theta)$ , а также учет изменения характера работы узла соединения «импост-рама» в образце SL70-18P при температурной нагрузке значительно повысили точность расчета.

При проведении расчётов также было установлено, что при различной длине ПВХ профиля и различном количестве точек его крепления к армирующему сердечнику наиболее нагруженными всегда остаются крайние две точки (с обеих сторон профиля). Усилия, возникающие в этих точках крепления, в наибольшей степени определяют деформированное состояние армированного ПВХ профиля при климатических температурных воздействиях.

Отдельное внимание стоит обратить на то, каким образом были реализованы условия крепления импоста в образцах SL70-18P и SL70-14P (с той стороны, где проектное решение не было нарушено). В действительности стальной сердечник в месте присоединения узлового элемента к импосту скреплен с ПВХ профилем 4-мя саморезами, расположенными с двух сторон импоста с различными смещениями ( $e_1$  и  $e_2$ ) относительно нейтральных осей ПВХ профиля и сердечника (рисунок 3.10). В расчетной схеме такой тип соединения был заменен шарниром, координата  $X$  которого была равна среднему значению между координатами  $X$  саморезов крепления в узле. Поскольку продольное усилие в этом шарнире в действительности распределяется на 4-ре самореза, то коэффициент продольной жесткости для него был увеличен в четыре раза ( $4\xi_x = 13.6 \cdot 10^6$  Н/м) относительно тех шарнирных узлов, в которых работает один саморез. Моменты, возникающие в данном шарнирном соединении и действующие на ПВХ профиль ( $M$ ) и стальной сердечник ( $M'$ ) были рассчитаны по следующим формулам:

$$M_j = -H_j \cdot \left( \frac{y_{sc1} + y_{sc2}}{2} - y_{ax}^{pvc} \right)$$

$$M'_j = H_j \cdot \left( \frac{y_{sc1} + y_{sc2}}{2} - y_{ax}^{core} \right)$$
(3.2)

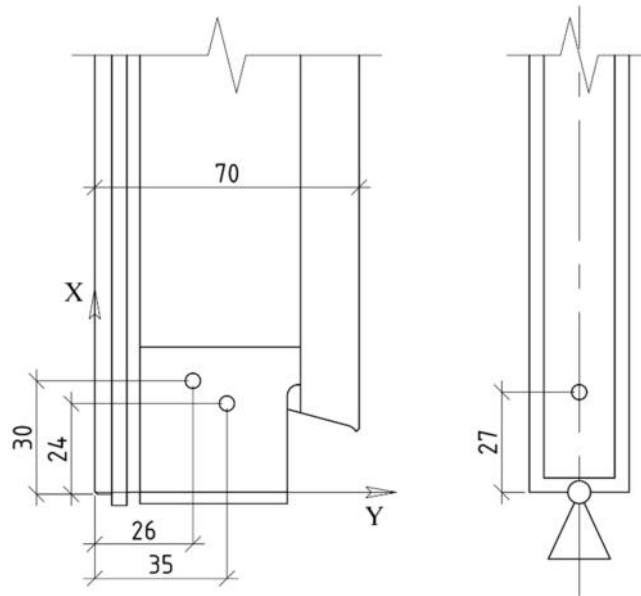


Рисунок 3.10 – Узел крепления импоста: слева – фактическое проектное решение, справа – расчетная модель

До настоящего момента был рассмотрен «чистый» прогиб импоста. Теперь определим, как на прогиб импоста влияет наличие створок и светопрозрачного заполнения. На рисунках 3.11-3.14 показано сравнение температурных прогибов импоста образцов SL70-18, SL70-14, SL82-18, SL82-14 без створок (с сэндвич-панелями) и со створками.

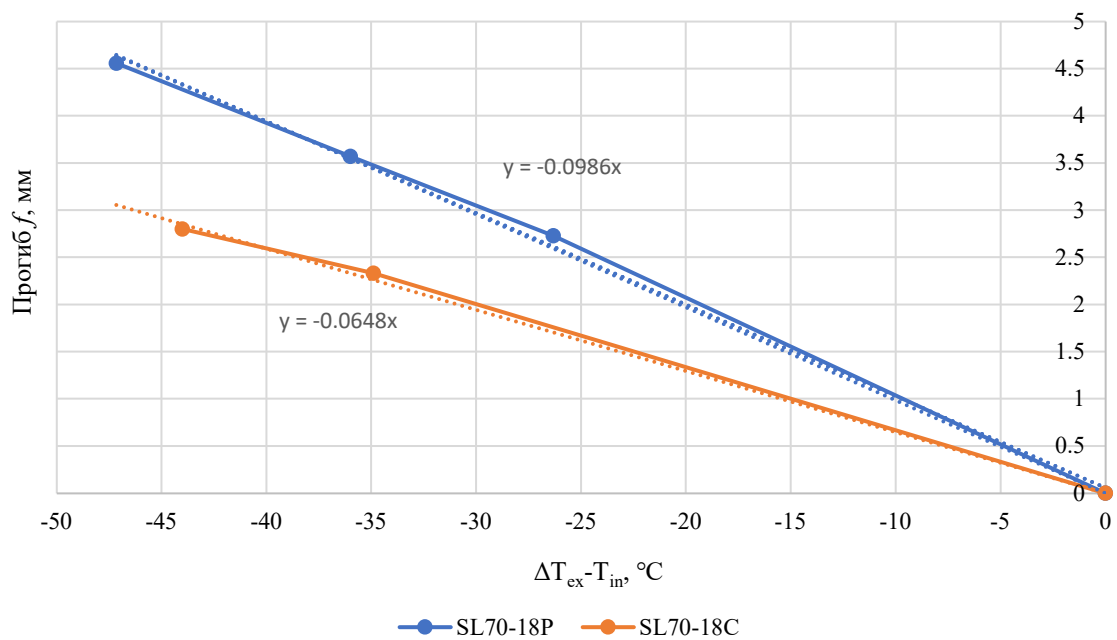


Рисунок 3.11 – Зависимость прогиба импоста от перепада температур для образцов SL70-18P (без створок) и SL70-18C (со створками)

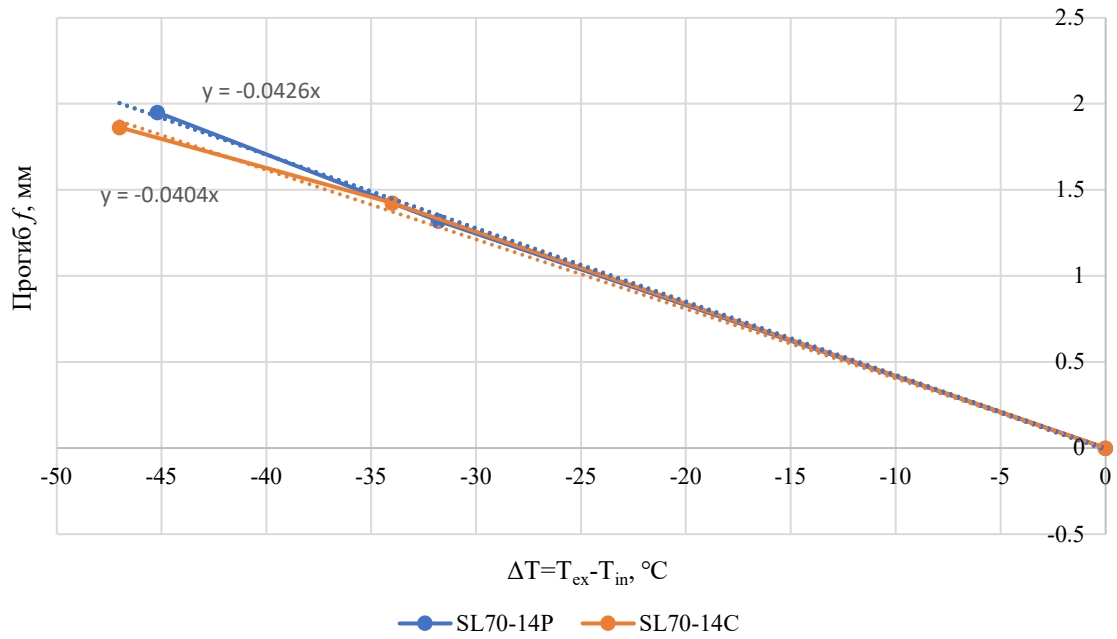


Рисунок 3.12 – Зависимость прогиба импоста от перепада температур для образцов SL70-14P (без створок) и SL70-14C (со створками)

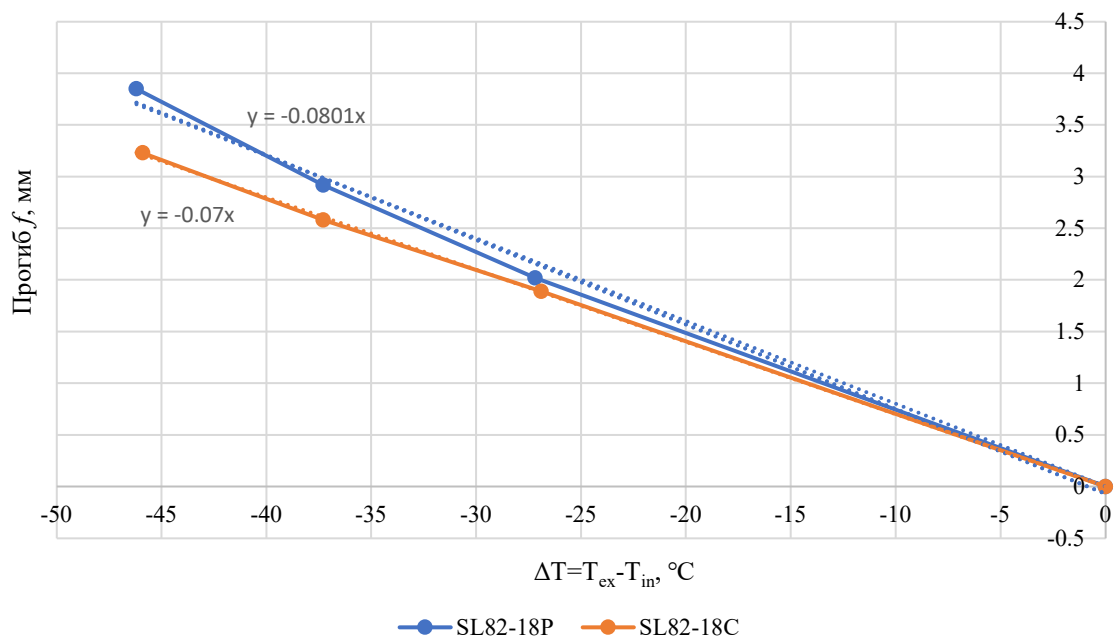


Рисунок 3.13 – Зависимость прогиба импоста от перепада температур для образцов SL82-18P (без створок) и SL82-18C (со створками)



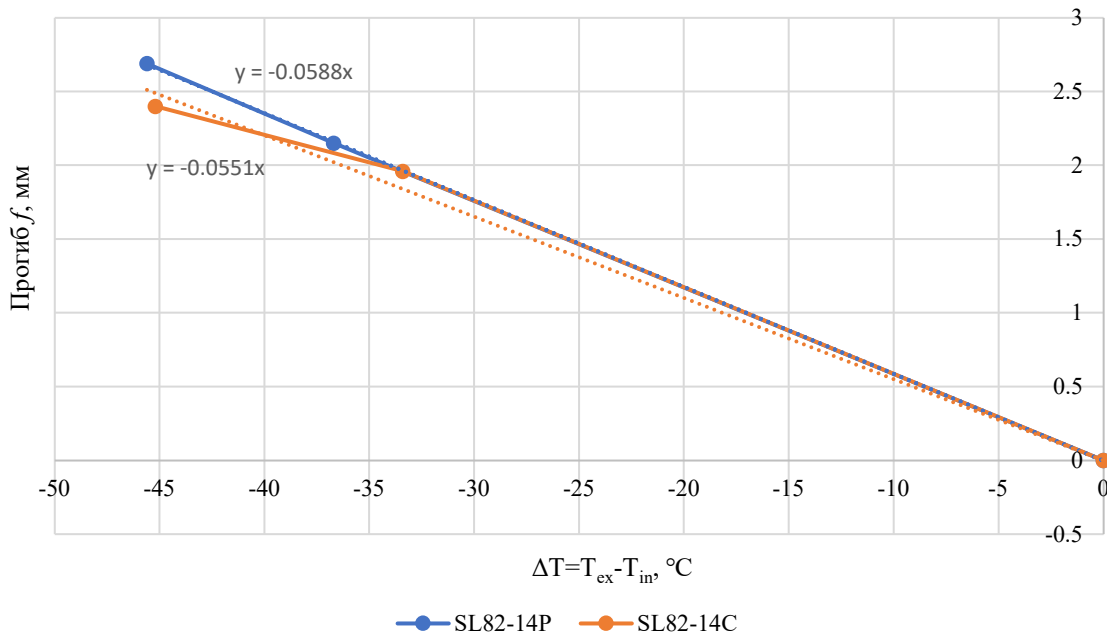


Рисунок 3.14 – Зависимость прогиба импоста от перепада температур для образцов SL82-14P (без створок) и SL82-14C (со створками)

На рисунках 3.11-3.14 пунктирными линиями показаны линии, наилучшим образом (в соответствии с методом наименьших квадратов) аппроксимирующие экспериментально определенные зависимости  $f(\Delta T)$ . Рядом с данными линиями показаны их уравнения. Коэффициент пропорциональности в этих уравнениях является средним отношением прогиба импоста окна к приращению температуры, вызвавшей этот прогиб, и отражает жесткость импоста. По представленным данным можно заключить, что наличие створки со светопрозрачным заполнением снижает температурный прогиб:

- для образца SL70-18 – в 1.52 раза;
- для образца SL70-14 – в 1.05 раза;
- для образца SL82-18 – в 1.14 раза;
- для образца SL82-14 – в 1.07 раза;

При этом зависимость  $f(\Delta T)$  не являются линейной. В виду высокой сходимости результатов эксперимента с результатами расчета для образцов с сэндвич-панелями (см. таблицу 3.8) можно сделать вывод, что наблюдаемая нелинейность возникает в следствие нелинейного характера работы узлов соединения оконной конструкции (см. рисунок 3.7).

Влияние створок со светопрозрачным заполнением на прогибы силовых элементов оконной конструкции при действии климатических температурных нагрузок тем больше, чем больше гибкость профильных элементов оконной конструкции. При относительно небольших габаритах оконного блока этим влиянием можно пренебречь и вести расчет температурного прогиба импоста без учета створок и светопрозрачного заполнения. Для оконных блоков больших габаритов такое упрощение приведет к переоценке прогибов, и их точный расчет

возможен только при учете совместной работы импоста и створок со светопрозрачным заполнением (см. раздел 2.7).

### 3.3 Выводы к 3 главе

1. Была разработана методика проведения экспериментальных исследований температурных деформаций оконных ПВХ конструкций;

2. В соответствие с разработанной методикой были исследованы образцы ПВХ окон различных размеров и конфигураций (всего – 9 вариантов);

3. Результаты экспериментальных данных позволяют сделать вывод о том, что узел механического крепления импоста к раме не является идеально шарнирным. При изгибе импоста в узле возникает момент, который направлен против деформаций изгиба и вызывает кручение профиля рамы. При этом функция момента от угла поворота импоста на опоре является нелинейной и различной для разных образцов. При её линейной аппроксимации, механическую работу узла крепления импоста к раме можно охарактеризовать коэффициентом жесткости узла  $k_0$  Н·м/рад, который:

- для образца SL82-18 составил 5069.4 Н·м/рад;
- для образца SL82-14 составил 1690.9 Н·м/рад;
- для образца SL70-18 составил 3613.4 Н·м/рад;

4. По результатам проведения экспериментальных исследований была верифицирована предложенная в главе 2 расчетная модель совместной механической работы ПВХ профиля и стального сердечника при температурных нагрузках. Результаты расчета прогиба импоста, выполненные в соответствии с данной расчетной моделью (по методике, описанной в разделе 2.5) были сопоставлены с результатами лабораторных испытаний. Для 9 различных расчетных ситуаций средняя относительная погрешность расчета в сравнении с данными эксперимента составила 4.73% (максимальная относительная погрешность – 11%).

5. Установлено, что при различной длине ПВХ профиля и различном количестве точек его крепления к армирующему сердечнику наиболее нагруженными всегда остаются крайние две точки (с обеих сторон профиля). Усилия, возникающие в этих точках крепления, в наибольшей степени определяют деформированное состояние армированного ПВХ профиля при климатических температурных воздействиях.

6. Показано, что в узле соединения импоста с оконной рамой, в случае если это соединение выполняется с креплением узлового элемента в армирующий сердечник (а не только в ПВХ), в результате температурных деформаций возникает усилие, действующее вдоль оси импоста, способное изменить условия механической работы узла. Данное усилие приводит к

деформации стенки профиля рамы, к которой прикреплен узловой элемент, и уменьшению усилий контактного взаимодействия между ними. В результате узел начинает работать шарнирно (поскольку момент, передающийся с узлового элемента на раму, передается как раз через площадку контакта между ними).

7. Экспериментальные данные показывают, что наличие створки со светопрозрачным заполнением снижает температурный прогиб импоста:

- для образца SL70-18 – в 1.52 раза;
- для образца SL70-14 – в 1.05 раза;
- для образца SL82-18 – в 1.14 раза;
- для образца SL82-14 – в 1.07 раза;

Наличие створок оказывает наибольшее влияние на прогиб импоста оконного блока, профили которого имеют наибольшую гибкость (большую длину при меньшем моменте инерции). При относительно небольших габаритах оконных блоков этой разницей можно пренебречь и вести расчет температурного прогиба импоста без учета створок и светопрозрачного заполнения. Для оконных блоков больших габаритов такое упрощение приведет к переоценке прогибов, и их точный расчет возможен только при учете совместной работы импоста и створок со светопрозрачным заполнением.

#### 4 ГЛАВА. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО СОВЕРШЕНСТВОВАНИЮ ОКОННЫХ ПВХ КОНСТРУКЦИЙ

Имея рабочий инструмент расчета температурных прогибов армированных ПВХ профилей, можно сделать выводы о влиянии тех или иных факторов на их температурные деформации. Одним из таких факторов являются возникающие в точках крепления ПВХ профиля к сердечнику продольные усилия.

Во-первых, данные продольные усилия, как уже было отмечено, создают в узлах крепления моменты сил, действующие как на ПВХ профиль, так и на стальной сердечник. Эти моменты оказывают существенное влияние на их совместный прогиб. Место установки саморезов выбирают, как правило, по центру армирующего сердечника [3]. При таком положении саморезы находятся на нейтральной оси сердечника (т.е.  $e_1=0$  – см. рисунок 4.1), но смещены относительно нейтральной оси ПВХ профиля в сторону помещения ( $e_2<0$ ). Данное смещение приводит к возникновению неблагоприятных моментов сил, действующих на ПВХ профиль и увеличивающих его прогиб от температурной нагрузки (зимой). Если начать смещать саморезы в сторону нейтральной оси ПВХ профиля (т.е. уменьшать абсолютное значение  $e_2$ ), величина этого момента начнет снижаться, но с другой стороны начнет возрастать эксцентриситет  $e_1$  (его значение будет положительным) и, следовательно, появится момент, который действует в узле на стальной сердечник. При этом неблагоприятные моменты сил в сердечнике вызывает именно положительное значение  $e_1$ . Таким образом при смещении саморезов от нейтральной оси сердечника к нейтральной оси ПВХ профиля с одной стороны будет уменьшаться неблагоприятный момент, действующий на ПВХ профиль, но с другой – увеличиваться неблагоприятный момент, действующий на стальной сердечник. В итоге, если все саморезы имеют одинаковую координату  $Y$ , то смена их положения на стенке профиля мало влияет на общий температурный прогиб.

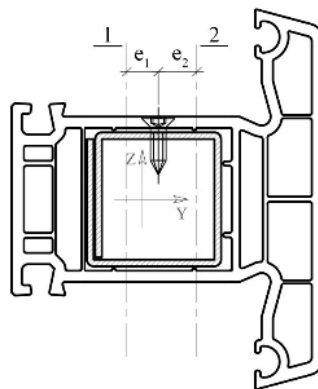


Рисунок 4.1 – Эксцентриситет точки крепления самореза: 1 – нейтральная ось армирующего сердечника, 2 – нейтральная ось ПВХ стержня

Так, проведем расчет температурного прогиба импоста образца SL82-18P (без створок) для различных положений саморезов крепления при температуре наружного воздуха минус 26°C. Исходные данные для расчета будут те же, что приведены в таблице 3.6 предыдущего подраздела. Результаты расчета представлены в таблице 4.1

Таблица 4.1 – Прогиб импоста образца SL82-18P (без створок) при различном положении саморезов

<b>Y<sub>sc</sub>, мм (отсчет ведется от внутренней поверхности ПВХ профиля)</b>	<b>Прогиб импоста f, мм</b>
21 (крайнее ближнее положение)	3.75
33 (стандартное положение)	3.79
41 (крайнее дальнее положение)	3.85

Видно небольшое изменение прогиба, но оно незначительно.

Наибольшего уменьшения прогиба можно достичь, если уменьшить расстояние между нейтральными осями ПВХ профиля и армирующего сердечника до нуля и расположить саморезы крепления точно в месте их общего положения. При этом будем иметь  $e_1 = 0$  и  $e_2 = 0$ . Теоретическая реализация этих условий в случае рассмотренного импоста SL70-18P приведет к уменьшению температурного прогиба (при  $T_{ex} = -26^\circ\text{C}$ ) с 3.79 мм до 2.32 мм, т.е. в 1.63 раз. Этот факт позволяет оценить влияние, которое оказывают неблагоприятные моменты сил, возникающие в узлах крепления «ПВХ-сердечник», на общий прогиб армированного ПВХ профиля. Другим возможным вариантом устранения этих неблагоприятных моментов сил является исключение возможности возникновения самих продольных усилий, т.е. такой способ взаимодействия армирующего сердечника с ПВХ профилем, при котором они могут испытывать независимые продольные деформации. Это должно примерно на столько же уменьшать температурный прогиб, как и устранение эксцентриситетов  $e_1$  и  $e_2$ . Для проверки данной гипотезы был испытан на ветровую и температурную нагрузку образец SL82-18P, в котором из профиля импоста были выкручены все саморезы крепления к армирующему сердечнику кроме центрального (рисунок 4.2). В этом случае продольных усилий между ПВХ профилем импоста и сердечником возникать не будет, а поперечные усилия будут передаваться через центральный саморез и поверхности контакта (при изгибной деформации контактные взаимодействия будут происходить на концах профиля). При проведении испытания температура внутри холодной камеры климатического стенда составляла  $-26.2^\circ\text{C}$  (та же, что и при испытании в первоначальной конфигурации). По показаниям датчиков линейного перемещения был определен температурный прогиб импоста. Он составил 2.86 мм (в первоначальной конфигурации - 3.85 мм), что подтверждает высказанное выше предположение.



Рисунок 4.2 – Саморезы крепления ПВХ профиля импоста к армирующему сердечнику  
выкручены

Интересно то, что удаление практически всех саморезов крепления импоста к сердечнику мало сказалось на жесткости импоста. На рисунке 4.3 показана зависимость прогиба импоста образца SL82-18P (без створок) от ветровой нагрузки в исходной конфигурации и при удаленных саморезах (SL82-18P (без створок)1).

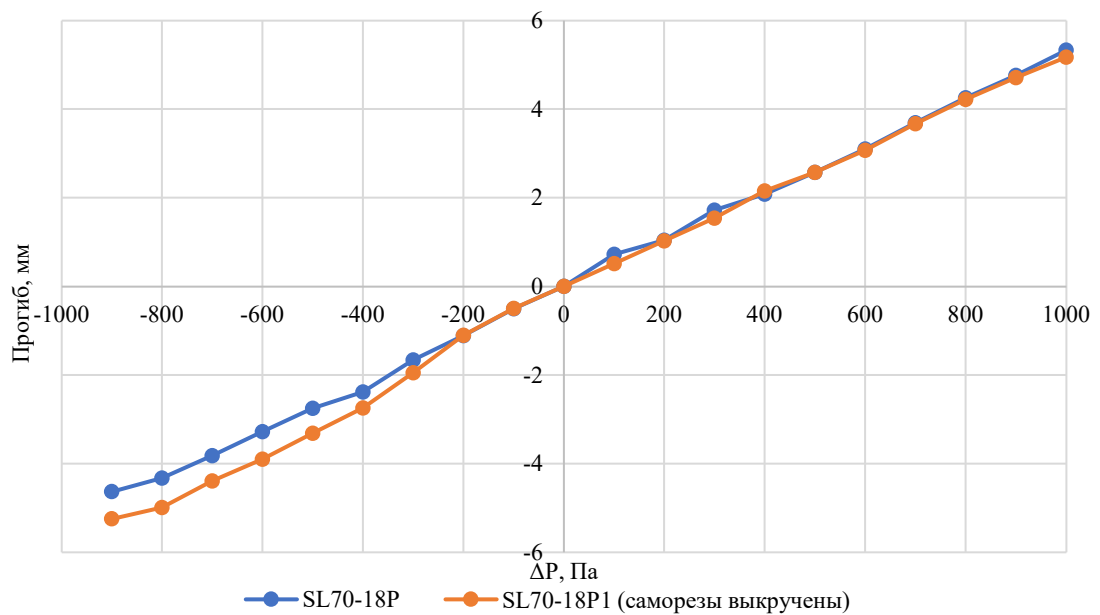


Рисунок 4.3 – Прогиб профиля импоста окна SL82-18 с заполнением из сэндвич-панелей при  
различной конфигурации в зависимости от ветровой нагрузки

Как видно, при положительной ветровой нагрузке между двумя конфигурациями нет никакого отличия. При отрицательной – прогиб импоста без саморезов больше. Это можно объяснить тем, что сердечник изначально плотно прилегает к внутренней стенке ПВХ профиля импоста с одной стороны в то время, как с другой существует зазор, который и приводит к незначительному увеличению прогиба. Тем не менее нельзя говорить о том, что такой способ крепления сердечника в ПВХ профиле (на один саморез) является надежным. Стенки ПВХ профиля не рассчитаны на восприятие контактных усилий при изгибе профиля. Со временем может произойти их разрушение, смятие (особенно это касается «усиков» внутренней камеры ПВХ профиля, обеспечивающих проектное положение сердечника) или иные необратимые деформации, в следствие которых изначальный зазор между ПВХ профилем и сердечником увеличится. С другой стороны, полученные результаты подают идею создания нового способа крепления армирующего стального сердечника в ПВХ профиле (особенно актуального для больших по длине импостов оконной конструкции). В центральной части сердечник крепится саморезом (или парой симметричных саморезов, расстояние между которыми подобрано таким образом, чтобы в них не возникало больших продольных усилий от температурных деформаций), а его торцевые части вставляются в пластиковые обоймы, которая плотно заходит в торцы ПВХ профиля, способствуя тем самым безопасной передаче контактных усилий от сердечника к ПВХ профилю. При этом концы сердечника, находясь внутри пластиковой обоймы, могут свободно перемещаться вдоль оси импоста (рисунок 4.4).

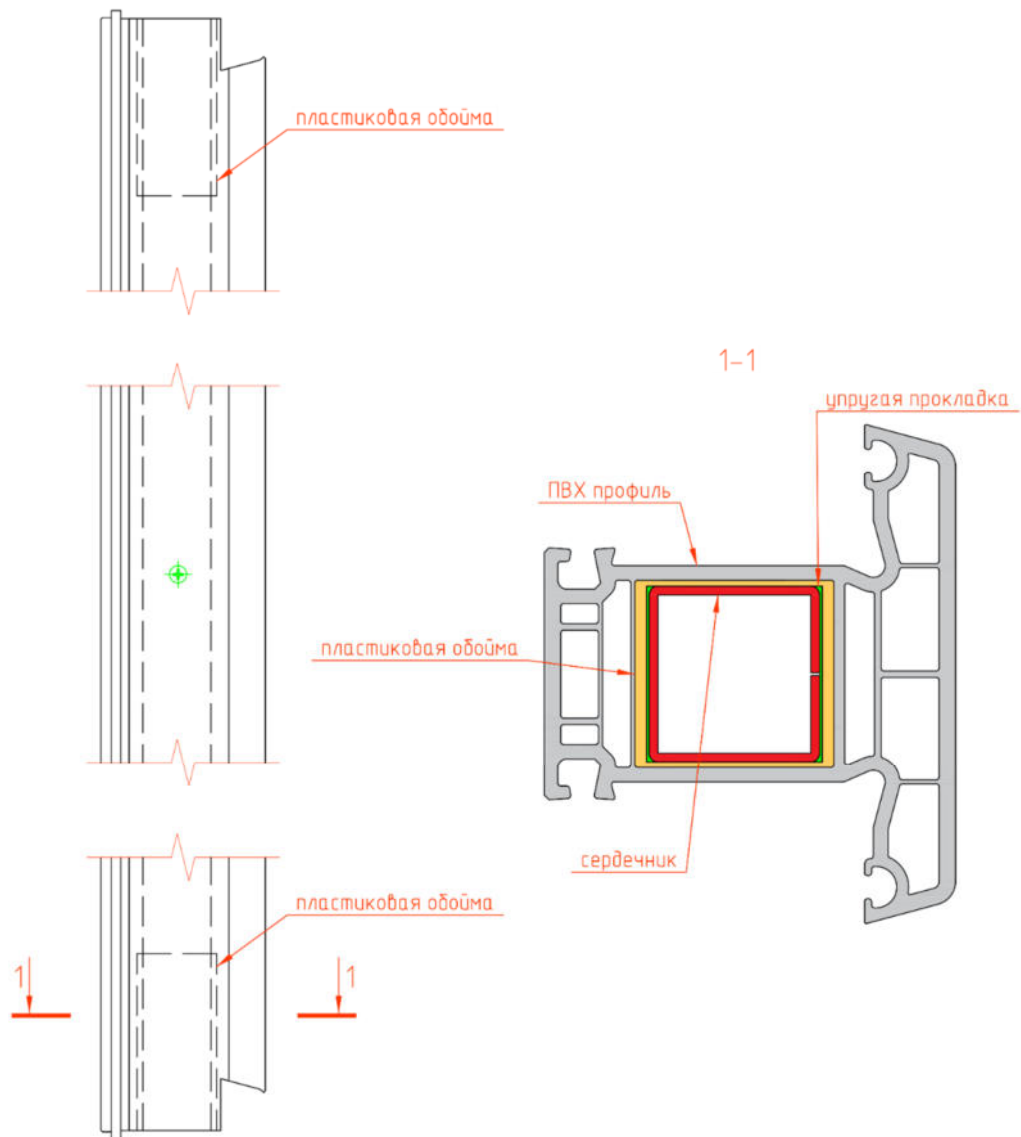


Рисунок 4.4 – Новый способ крепления армирующего сердечника в ПВХ профиль.

#### Выводы к 4 главе

1. Доказано, что на прогиб армированного ПВХ профиля от действия температуры большое влияние оказывают моменты сил, возникающие в точках крепления сердечника к ПВХ профилю. Эти моменты сил создаются продольными силами реакции, которые действуют между ПВХ профилем и стальным сердечником в точках крепления и вызваны их неодинаковой температурной «усадкой». Если точки крепления смещены относительно нейтральной оси ПВХ профиля в сторону помещения, это вызывает неблагоприятный момент, действующий на ПВХ профиль в сторону увеличения температурного прогиба. Если точки крепления смещены относительно нейтральной оси стального сердечника в сторону улицы, это вызывает неблагоприятный момент, действующий на сердечник в сторону увеличения температурного



прогиба. Таким образом, при перемещении точек крепления в какую-либо сторону (ближе к помещению или к улице) температурный прогиб системы «ПВХ профиль – сердечник» практически не меняется. Значение имеет не столько положение точек крепления, сколько расстояние между нейтральной осью ПВХ профиля и нейтральной осью стального сердечника. На примере импоста окна SL70-18 показано, что при прочих равных условиях (моменте инерции и площади ПВХ профиля и сердечника), если нейтральная ось ПВХ профиля и нейтральная ось сердечника будут совпадать, это уменьшит их общий температурный прогиб в 1.63 раза (на 39%).

2. Другим способом избавиться от негативного влияния моментов, возникающих в точках крепления ПВХ профиля к сердечнику, является создание таких условий их взаимодействия, при которых они получают возможность деформироваться в продольном направлении независимо друг от друга. Это было продемонстрировано экспериментально на примере образца SL82-18P (без створок), у которого были выкручены все саморезы крепления сердечника в профиле импоста, кроме центрального. В результате температурный прогиб импоста уменьшился в 1.35 раз (на 26%). При этом испытания на ветровую нагрузку показали, что импост имеет такую же жесткость, как и первоначально (со всеми саморезами).

3. Предложен новый способ крепления армирующего сердечника в ПВХ профиле импоста. В центральной части сердечник крепится саморезом (или парой симметричных саморезов, расстояние между которыми подобрано таким образом, чтобы в них не возникало больших продольных усилий от температурных деформаций), а его торцевые части вставляются в пластиковые обоймы, которые плотно заходят в торцы ПВХ профиля, способствуя тем самым безопасной передаче контактных усилий от сердечника к ПВХ профилю. При этом концы сердечника, находясь внутри пластиковой обоймы, могут свободно перемещаться вдоль оси импоста. Данный способ крепления армирующего сердечника в ПВХ профиле предлагается использовать в первую очередь в оконных импостах, поскольку это наиболее ответственные элементы оконной конструкции.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По итогу решения научных задач получены следующие результаты:

1. Выполненный анализ научной и нормативно-технической литературы показал, что в настоящей момент не разработаны методики расчета НДС светопрозрачных ограждающих конструкций из ПВХ профилей при климатических температурных воздействиях, которые позволили бы обеспечить соответствие технических решений оконных конструкций требованиям 384-ФЗ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений».

2. Разработана методика проведения численных и лабораторных исследований изгибных деформаций оконных ПВХ конструкций при климатических температурных воздействиях, соответствующих зимним условиям эксплуатации. На ее основе были исследованы образцы ПВХ окон различных размеров и конфигураций (всего – 9 вариантов).

3. На основании результатов численных и лабораторных исследований было выяснено, что узел механического крепления импоста к раме не является идеально шарнирным. Определены коэффициенты жесткости данного узла (при повороте из плоскости окна). Учёт характеристик жёсткости узла крепления импоста к оконной раме позволяет снизить погрешность расчета прогиба импоста.

4. Экспериментально доказано, что влияние створок со светопрозрачным заполнением на прогибы профильных элементов оконной конструкции при действии климатических температурных нагрузок тем больше, чем больше гибкость профильных элементов оконной конструкции. При небольших габаритах оконного блока (высотой до 1400 мм) этим влиянием можно пренебречь и вести расчет температурного прогиба импоста без учета створок и светопрозрачного заполнения. При расчете оконных конструкций бóльших габаритов необходимо рассматривать совместную механическую работу рамы и створчатых элементов.

5. Разработана модель НДС оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником, которая представляет окно в виде набора комбинаций профилей и позволяет учитывать многокомпонентную структуру оконной конструкции. На основе данной модели разработана методика расчета НДС оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным сердечником при климатических температурных воздействиях, учитывающая фактическое распределение температуры по поперечному сечению армированных ПВХ профилей, схему их крепления к армирующим стальным сердечникам, многокомпонентную структуру оконной конструкции, механическую работу оконного уплотнителя и запорных механизмов.

6. Исследованы закономерности распределения усилий в элементах крепления армирующего сердечника к ПВХ профилю. Установлено, что при различной длине ПВХ профиля и различном количестве точек его крепления к армирующему сердечнику наиболее нагруженными всегда остаются крайние две точки (с обеих сторон профиля). Усилия, возникающие в этих точках крепления, в наибольшей степени определяют деформированное состояние армированного ПВХ профиля при климатических температурных воздействиях.

7. По результатам проведения лабораторных исследований была верифицирована разработанная методика расчета НДС армированных ПВХ профилей при климатических температурных воздействиях. Для 9 различных расчетных ситуаций средняя относительная погрешность расчета в сравнении с данными эксперимента составила 4.73%.

8. Был сформулирован критерий ограничения величины температурных деформаций оконных конструкций из ПВХ профилей, который заключается в ограничении степени обжатия уплотняющего контура оконной конструкции диапазоном его нормальной работы. Для большинства EPDM уплотнителей, используемых в оконных конструкциях, рекомендуемое минимальное обжатие составляет от 1.5 до 3 мм. Если в следствие деформаций оконной конструкции фактическая степень обжатия уплотнителя окажется меньше минимальной, произойдет нарушение герметичности оконной конструкции.

9. Предложены и обоснованы способы по уменьшению температурных деформаций профильных элементов оконных ПВХ конструкций до 61% от первоначальных без увеличения их жесткости:

- за счет совмещения нейтральных осей ПВХ профиля и сердечника;
- за счет обеспечения возможности независимых продольных деформаций оконного ПВХ профиля и армирующего сердечника.

## РЕКОМЕНДАЦИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На основании полученных результатов исследований, приведенных в данной работе, можно говорить, что перспективными направлениями дальнейшего исследования напряженно-деформированного состояния оконных конструкций являются:

- создание методов аналитического расчета эксплуатационно-технических характеристик подобных типов конструкций с учетом деформаций их профильных элементов;
- создание методов расчета напряженно-деформированного состояния оконных конструкций при комбинированном действии различных нагрузок и воздействий.

**ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Публикации в изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий:

1. Аксёнов И.С., Константинов А.П. Упрощенный подход к моделированию уплотнителя для прочностного расчета оконных конструкций // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. Вып. 3. С. 317–330. DOI: 10.22227/1997-0935.2021.3.317-330

2. Аксёнов И.С., Константинов А.П. Аналитический метод расчета напряженно-деформированного состояния оконных профилей ПВХ при действии температурных нагрузок // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. Вып. 11. С. 1437–1451. DOI: 10.22227/1997-0935.2021.11.1437-1451

3. Аксёнов И.С., Константинов А.П., Верховский А.А. Численно-аналитический метод расчета температурных деформаций оконных ПВХ профилей // Строительство и реконструкция. 2022. №4(102). С. 3-14. DOI: 10.33979/2073-7416-2022-102-4-3-14

4. Аксёнов И.С., Константинов А.П. Аналитический расчет сложного напряженно-деформированного состояния армированного ПВХ профиля при температурной нагрузке // Жилищное строительство. 2022. № 11. С. 19-28. DOI: 10.31659/0044-4472-2022-11-19-28

5. Аксёнов И.С. Деформационная устойчивость оконных ПВХ конструкций при температурных нагрузках // Строительство и реконструкция. 2023. № 4. С. 5-18. DOI: 10.33979/2073-7416-2023-108-4-5-18

Статьи, опубликованные в журналах, индексируемых в международных реферативных базах Scopus и Web of Science:

6. Aksenov I. S., Konstantinov A. P. Temperature deformations of PVC window profiles with reinforcement // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. No. 18(2). Pp. 98-111. DOI:10.22337/2587-9618-2022-18-2-98-111.

7. Konstantinov A., Verkhovsky A., Aksenov A., Krutov A. Criteria for climatic applicability of modern window types // E3S Web Conference. 2021. Volume 263. DOI: 10.1051/e3sconf/202126302039.

8. Konstantinov A., Aksenov A. Engineering Method for calculating temperature deformations of PVC window profiles with a reinforcing steel core // Buildings. 2023. No. 13 (6). 1466. DOI: 10.3390/buildings13061466.

Статьи, опубликованные в других научных журналах и изданиях:

9. Аксёнов И.С., Константинов А.П. Физическая нелинейность при расчете температурных деформаций армированного ПВХ профиля // Актуальные проблемы строительной отрасли и образования – 2021: сборник докладов Второй Национальной научной конференции, г. Москва, 8 декабря 2021 г. С. 113-119.



**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Анурьев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя. В 3 т. Т. 1 / В. И. Анурьев, под ред. И. Н. Жестковой, 8-е изд., Москва: Машиностроение, 2006. 920 с.
2. Борискина И. В., Плотников А. А., Захаров А. В. Проектирование современных оконных систем гражданских зданий / И. В. Борискина, А. А. Плотников, А. В. Захаров, 3-е изд., Москва: Издательство АВС, 2003. 320 с.
3. Борискина И. В., Щуров А. Н., Плотников А. А. Окна для индивидуального строительства / И. В. Борискина, А. Н. Щуров, А. А. Плотников, Москва: Функция Рус, 2010. 320 с.
4. Варданян Г. С. [и др.]. Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г. С. Варданян, В. И. Андреев, Н. М. Атаров, А. А. Горшков, под ред. Г. С. Варданян, Москва: Издательство АСВ, 1995. 572 с.
5. Верховский А. А., Зимин А. Н., Потапов С. С. Применимость современных светопрозрачных ограждающих конструкций для климатических регионов России // Жилищное строительство. 2015. № 6. С. 16–19.
6. Верховский А. А., Шубин И. Л., Шеховцов А. В. Способ определения воздухопроницаемости строительных ограждающих конструкций: пат. 2445610 РФ № 2010151153/28 / А. А. Верховский, И.Л. Шубин, А.В. Шеховцов; заявл. 15.12.2010; опубл. 20.03.2012, Бюл. №8. 6 с.
7. Веснин В. И. Инфильтрация воздуха и тепловые потери помещений через оконные проёмы // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура. 2016. № 3 (24). С. 10–16. DOI: 10.17673/Vestnik.2016.03.2.
8. Власов В. А., Перехоженцев А. Г. Исследование температурных полей окон из поливинилхлоридных и алюминиевых профилей // Вестник волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: строительство и архитектура. 2005. № 5. С. 173–177.
9. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, 2-е изд., Москва: Стройиздат, 1973. 628 с.
10. ГОСТ 23166-99 Блоки оконные. Общие технические условия, Москва: Госстрой России, ГУП ЦПП, 2000.
11. ГОСТ 30674-99 Блоки оконные из поливинилхлоридных профилей. Технические условия, Москва: Госстрой России, ГУП ЦПП, 2000.
12. ГОСТ 26602.2-99 Блоки оконные и дверные. Методы определения воздухо- и водопроницаемости, Москва: Госстрой России, ГУП ЦПП, 2000.

13. ГОСТ 26602.1-99 Блоки оконные и дверные. Методы определения сопротивления теплопередаче, Москва: Госстрой России, ГУП ЦПП, 2000.
14. ГОСТ 30971-2012 Швы монтажные узлов примыкания оконных блоков к стеновым проемам. Общие технические условия, Москва: Стандартинформ, 2014.
15. ГОСТ Р 56926-2016 Конструкции оконные и балконные различного функционального назначения для жилых зданий. Общие технические условия, Москва: Стандартинформ, 2016.
16. ГОСТ 30494-2011 Здания жилые и общественные. Параметры микроклимата в помещениях, Москва: Стандартинформ, 2019.
17. ГОСТ Р ИСО 7730-2009 Эргономика термальной среды. Аналитическое определение и интерпретация комфортности теплового режима с использованием расчета показателей PMV и PPD и критериев локального теплового комфорта, Москва: Стандартинформ, 2019.
18. ГОСТ Р 56734-2015 Здания и сооружения. Расчет показателя теплозащиты ограждающих конструкций с отражательной теплоизоляцией, Москва: Стандартинформ, 2019.
19. ГОСТ 23166-2021 Конструкции оконные и балконные светопрозрачные ограждающие. Общие технические условия, Москва: Стандартинформ, 2021.
20. Елдашов Ю. А., Сесюнин С. Г., Ковров В. Н. Экспериментальное исследование типовых оконных блоков на геометрическую стабильность и приведенное сопротивление теплопередаче от действия тепловых нагрузок // Вестник МГСУ. 2009. № 3. С. 146–149.
21. Калабин В. А. Оценка величины тепловой деформации ПВХ-профиля. Часть 1. Зимние поперечные деформации. // Светопрозрачные конструкции. 2013. № 1 (2). С. 6–9.
22. Калабин В. А. Оценка величины тепловой деформации ПВХ-профиля. Часть 2. Летние поперечные деформации. // Светопрозрачные конструкции. 2013. № 3. С. 12–15.
23. Клепиков С. Н. Расчёт конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков, Киев: Будівельник, 1967. 184 с.
24. Колчунов В. И., Скобелева Е. А., Коржавых А. И. К расчету деформативности железобетонных рам с элементами составного сечения // Academia. Архитектура и Строительство. 2009. № 4. С. 74–78.
25. Константинов А. П. Вопросы расчета оконных блоков из ПВХ на ветровую нагрузку // Перспективы науки. 2018. № 1 (100). С. 26–30.
26. Константинов А. П., Верховский А. А. Влияние отрицательных температур на теплотехнические характеристики оконных блоков из ПВХ профилей // Строительство и реконструкция. 2019. № 3 (83). С. 72–82. DOI: 10.33979/2073-7416-2019-83-3-72-82.
27. Коробейников С. Н. [и др.]. Компьютерное моделирование деформирования эластомеров // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1-1 (81). С. 165–169. DOI: 10.14258/izvasu(2014)1.1-37.



28. Корсун Н. Д., Простакишина Д. А. Анализ НДС составного сечения из тонкостенных профилей с учетом начальных геометрических несовершенств // Академический вестник Уралниипроект РААСН. 2018. № 4. С. 83–88.
29. Кунин Ю. С., Алекперов Р. Г., Потапова Т. В. Зависимость воздухопроницаемости светопрозрачных конструкций от температурных воздействий // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 10. С. 114–120.
30. Леонтьев А. Н., Леонтьева А.Г. Расчет бесконечно длинной составной балки, расположенной на упругом основании // Вестник МГСУ. 2010. № 4–3. С. 167–172.
31. Линьков В. И. Моделирование работы деревянных балок составного сечения на податливых связях с применением теории составных стержней А.Р. Ржаницына // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 30–35.
32. Лурье А. Нелинейная теория упругости / А. Лурье, Москва: Наука, 1980. 512 с.
33. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье, Москва: Наука, 1970. 940 с.
34. Поздеев А. А., Трусов А. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А. А. Поздеев, А. В. Трусов, Ю. И. Няшин, Москва: Наука, 1986. 230 с.
35. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластины / А. Р. Ржаницын, Москва: Стройиздат, 1986. 316 с.
36. Романов Н. П. [и др.]. Расчет составных деревянных балок // Синергия науки. 2016. № 6. С. 337–393.
37. СанПиН 1.2.3685-21 Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания / СанПиН, Официальный интернет-портал правовой информации [www.pravo.gov.ru](http://www.pravo.gov.ru), 03.02.2021, N 0001202102030022.
38. Сесюнин С. Г., Елдашов Ю. А. Моделирование сопряженной задачи термоупругости на примере анализа вариантов конструктивного оформления оконного блока зданий // Светопрозрачные конструкции. 2005. № 4.
39. СП 60.13330.2012 Отопление, вентиляция и кондиционирование воздуха, Москва: Стандартинформ, 2021.
40. Техническое руководство по изготовлению оконных и дверных конструкций, Москва: VEKA AG, 2010. 454 с.
41. Фардиев Р. Ф., Ашрапов А. Х. Применение теории составных стержней к определению характера распределения напряжений в поперечном сечении усиленного внецентренно сжатого элемента // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2015. № 4 (34). С. 363–369.

42. Филатов В. В., Кужин Б. Ф., Тхи Линь Куен Хоанг Расчет двухслойной составной балки, свободно лежащей на упругом основании // Вестник МГСУ. 2020. № 15 (12). С. 1685–1692. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.12.1685-1692.
43. Шеховцов А. В. Воздухопроницаемость оконного блока из ПВХ профилей при действии отрицательных температур // Вестник МГСУ. 2011. № 3 (1). С. 263–269.
44. Air Infiltration rate of windows under temperature and pressure differentials, Toronto: CANMET Report. 1995.
45. Alahmer A. [и др.]. Vehicular thermal comfort models; a comprehensive review // Applied Thermal Engineering. 2011. № 6–7 (31). С. 995–1002. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2010.12.004.
46. Ali A., Hosseini M., Sahari B. A review of constitutive models for rubber-like materials // American Journal of Engineering and Applied Sciences. 2010. № 1 (3). С. 232–239. DOI: 10.3844/ajeassp.2010.232.239.
47. Aqilah N., Rijal H. B., Zaki S. A. A Review of Thermal Comfort in Residential Buildings: Comfort Threads and Energy Saving Potential // Energies. 2022. № 23 (15). 9012. DOI: 10.3390/en15239012.
48. ASTM E283/E283M Standard Test Method for Determining Rate of Air Leakage Through Exterior Windows, Skylights, Curtain Walls, and Doors Under Specified Pressure Differences Across the Specimen.
49. ASTM E1424 Standard Test Method for Determining the Rate of Air Leakage Through Exterior Windows, Curtain Walls, and Doors Under Specified Pressure and Temperature Differences Across the Specimen.
50. Baker P. H., Sharples S., Ward I. C. Air flow through cracks // Building and Environment. 1987. № 4 (22). С. 293–304. DOI: 10.1016/0360-1323(87)90022-9.
51. Baldinelli G. [и др.]. Sensitivity analysis of window frame components effect on thermal transmittance // Energies. 2020. № 11 (13). DOI: 10.3390/en13112957.
52. Berardi U. [и др.]. Experimental and numerical investigation of the thermal transmittance of PVC window frames with silica aerogel // Journal of Building Engineering. 2020. № 2 (32). 101665. DOI: 10.1016/j.jobbe.2020.101665.
53. Buckley C., Abraham F., Focatiis D. De Multi-axial viscoelastic deformation of carbon-black filled EPDM rubber CRC Press, 2009. С. 187–192. DOI: 10.1201/NOE0415563277.ch31.
54. Bursey T., Green G. H. Combined Thermal and Air Leakage Performance of Double Windows // ASHRAE Transactions. 1970. № 2157 (76 p 2). С. 215–226.
55. Carlos J. S., Corvacho H. Assessing Thermal Comfort Due to a Ventilated Double Window Institute of Physics Publishing // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. №4 (245). 042004. DOI: 10.1088/1757-899X/245/4/042004.

56. Chen S. [и др.]. Measured air tightness performance of residential buildings in North China and its influence on district space heating energy use // *Energy and Buildings*. 2012. (51). С. 157–164. DOI: 10.1016/j.enbuild.2012.05.004.
57. Chen Z. [и др.]. Thermal Properties of Aluminum & PVC Co-extrusion Sliding Window // *International Conference on Multimedia Technology: proceedings: (ICMT 2011) July 26-28, Hangzhou, China*. 2011. С. 5660–5663.
58. Cheng M., Chen W. Experimental investigation of the stress–stretch behavior of EPDM rubber with loading rate effects // *International Journal of Solids and Structures*. 2003. № 18 (40). С. 4749–4768. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00182-3.
59. Chiu Y. H., Etheridge D. W. Calculations and Notes on the Quadratic and Power Law Equations for Modelling Infiltration // *International Journal of Ventilation*. 2002. № 1 (1). С. 65–77. DOI: 10.1080/14733315.2002.11683623.
60. Choi Y., Ozaki A., Lee H. Impact of Window Frames on Annual Energy Consumption of Residential Buildings and Its Contribution to CO2 Emission Reductions at the City Scale // *Energies*. 2022. № 10 (15). С. 3692. DOI: 10.3390/en15103692.
61. Cuce E. Role of airtightness in energy loss from windows: Experimental results from in-situ tests // *Energy and Buildings*. 2017. (139). С. 449–455. DOI: 10.1016/j.enbuild.2017.01.027.
62. El-Din Mansour A. [и др.]. Numerical verification of composite rods theory on multi-story buildings analysis // *E3S Web of Conferences*. 2018. (33). 02077. DOI: 10.1051/e3sconf/20183302077.
63. Elghamry R., Hassan H. Impact of window parameters on the building envelope on the thermal comfort, energy consumption and cost and environment // *International Journal of Ventilation*. 2020. № 4 (19). С. 233–259. DOI: 10.1080/14733315.2019.1665784.
64. Elmahdy A. H. Air leakage characteristics of windows subjected to simultaneous temperature and pressure differentials / *Window Innovations' 95: 05 June 1995, Toronto, Ontario, Canada*. 1995. С. 146–163.
65. Ernst S., Bridge R. Q., Wheeler A. Correlation of Beam Tests with Pushout Tests in Steel-Concrete Composite Beams // *Journal of Structural Engineering*. 2010. № 2 (136). С. 183–192. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2010)136:2(183).
66. Etheridge D. W. A note on crack flow equations for ventilation modelling // *Building and Environment*. 1998. № 5 (33). С. 325–328.
67. Filatov V., Ryasny N. A numerical algorithm for solving a two-layered composite beam subjected to vibrational loads // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. (365). 042065. DOI: 10.1088/1757-899X/365/4/042065.

68. Fleury G., Thomas M. Variations to window air permeability according to outside temperature // Cahiers Du Centre Scientifique et Technique Du Batiment. 1972. № 1129 (132), Air Infiltration Centre.
69. Gustavsen A. [и др.]. Two-Dimension Conduction and CFD Simulations for Heat Transfer in Horizontal Window Frame Cavities // ASHRAE Transactions. 2005. Том 111, часть 1.
70. Halle S. [и др.]. The Combined Effect of Air Leakage and Conductive Heat Transfer in Window Frames and Its Impact on the Canadian. Energy Rating Procedure // ASHRAE TRANSACTIONS. 1998. № Pt. 1 (104).
71. Heat Transfer Module User's Guide. COMSOL Multiphysics v. 6.1, Stockholm, Sweden: COMSOL AB, 2022. 942 с.
72. Henry R., Patenaude A. Measurements of window air leakage at cold temperatures and impact on annual energy performance of a house // ASHRAE Transactions. 1998. № Pt 1B (104). C. 1254–1260.
73. Heydari A., Sadati S. E., Gharib M. R. Effects of different window configurations on energy consumption in building: Optimization and economic analysis // Journal of Building Engineering. 2021. (35). 102099. DOI: 10.1016/j.jobe.2020.102099.
74. Hicks S. J., Smith A. L. Stud Shear Connectors in Composite Beams that Support Slabs with Profiled Steel Sheeting // Structural Engineering International. 2014. № 2 (24). C. 246–253. DOI: 10.2749/101686614X13830790993122.
75. Honma H. Ventilation of Dwellings and its Disturbances / H. Honma, Stockholm: Faibo Grafiska, 1975. 159 с.
76. Howard M. S., Walker I. S., Wilson D. J. A comparison of the power law to quadratic formulations for air infiltration calculations // Energy and Buildings. 1998. № 3 (27). C. 293–299. DOI: 10.1016/S0378-7788(97)00047-9
77. Hou Y. Effect of wind speed on human thermal sensation and thermal comfort // AIP Conference Proceedings, American Institute of Physics Inc. 2018. 030012. DOI: 10.1063/1.5041131.
78. Jiang J. [и др.]. Rate-dependent compressive behavior of EPDM insulation: Experimental and constitutive analysis // Mechanics of Materials. 2016. (96). C. 30–38. DOI: 10.1016/j.mechmat.2016.02.003.
79. Karnovsky I. A., Lebed O. Advanced Methods of Structural Analysis / I. A. Karnovsky, O. Lebed, Boston, MA: Springer US, 2010. 593 с. DOI: 10.1007/978-1-4419-1047-9.
80. Kehrlid D. Window air leakage performance as a function of differential temperatures and accelerated environmental aging, Rochester, New York, USA: Schlegel Corporation. 1985. C. 872–890.
81. Klems J. H. Methods of estimating air infiltration through windows // Energy and Buildings. 1983. № 4 (5). C. 243–252. DOI: 10.1016/0378-7788(83)90012-9.

82. Konstantinov A., Lambias Ratnayake M. Calculation of PVC windows for wind loads in high-rise buildings // E3S Web of Conferences. 2018. (33). C. 02025. DOI: 10.1051/e3sconf/20183302025.
83. Konstantinov A., Motina M. Influence of Sashes Stiffness on PVC Windows Resistance to Wind Load Institute of Physics Publishing, 2018. DOI: 10.1088/1757-899X/463/3/032044.
84. Konstantinov A., Verkhovsky A. Assessment of the Wind and Temperature Loads Influence on the PVC Windows Deformation // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. № 3 (753). C. 032022. DOI: 10.1088/1757-899X/753/3/032022.
85. Konstantinov A., Verkhovsky A. Assessment of the Negative Temperatures Influence on the PVC Windows Air Permeability // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. № 2 (753). C. 022092. DOI: 10.1088/1757-899X/753/3/032022.
86. Konstantinov A., Verkhovsky A., Lybakova E. Sound insulation of PVC windows at negative outdoor temperatures // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. № 1 (896). C. 012054. DOI: 10.1088/1757-899X/896/1/012054.
87. Koper P., Jankowska M. Additional insulation materials in a window frame: experimental and CFD analyses // Architecture, Civil Engineering, Environment. 2019. № 2 (12). C. 149–157. DOI: 10.21307/acee-2019-031.
88. Lacki P., Różycka J., Rogoziński M. Analysis of heat transfer through PVC window profile reinforced with Ti6Al4V alloy // Key Engineering Materials. 2016. № 687. C. 236–242. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.687.236.
89. Lala B. [и др.]. The Challenge of Multiple Thermal Comfort Prediction Models: Is TSV Enough? // Buildings. 2023. № 4 (13). C. 890. DOI: 10.3390/buildings13040890.
90. Lawson R. M., Lim J. B. P., Popo-Ola S. O. Pull-out forces in shear connectors in composite beams with large web openings // Journal of Constructional Steel Research. 2013. (87). C. 48–59. DOI: 10.1016/j.jcsr.2013.03.025.
91. Lechowska A. A., Schnotale J. A., Baldinelli G. Window frame thermal transmittance improvements without frame geometry variations: An experimentally validated CFD analysis // Energy and Buildings. 2017. (145). C. 188–199. DOI: 10.1016/j.enbuild.2017.04.002.
92. Major M., Kosiń M., Major I. The effect of window air inlets on office room comfort // E3S Web of Conferences. 2019. № 97. 06013. DOI: 10.1051/e3sconf/20199706013.
93. Multibody Dynamics Module User's Guide. COMSOL Multiphysics v. 6.1, Stockholm, Sweden: COMSOL AB, 2022. 336 c.
94. Smusz R. [и др.]. Experimental and Numerical Characterizataion of Thermal Bridges in Windows // Advances in Science and Technology Research Journal. 2023. № 1 (17). C. 315–331. DOI: 10.12913/22998624/159070.

95. Structural Mechanics Module User's Guide. COMSOL Multiphysics v. 6.1, Stockholm, Sweden: COMSOL AB, 2022. 1920 с.
96. Tahmasebinia F., Ranzi G., Zona A. Probabilistic three-dimensional finite element study on composite beams with steel trapezoidal decking // *Journal of Constructional Steel Research*. 2013. (80). C. 394–411. DOI: 10.1016/j.jcsr.2012.10.003.
97. Takada K. [и др.]. Study on linear thermal transmittance reduction method between PVC windows and building walls // *Journal of Environmental Engineering (Transactions of AIJ)*. 2018. № 754 (83). C. 955–964. DOI: 10.3130/aije.83.955.
98. Verkhovskiy A., Bryzgalin V., Lyubakova E. Thermal Deformation of Window for Climatic Conditions of Russia // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. № 3(463). 032048. DOI: 10.1088/1757-899X/463/3/032048.
99. Wang L., Greenberg S. Window operation and impacts on building energy consumption // *Energy and Buildings*. 2015. (92). C. 313–321. DOI: 10.1016/j.enbuild.2015.01.060.
100. Wang Y., Lian Z. A Study on the Thermal Comfort under Non-uniform Thermal Environment Elsevier Ltd, 2017.C. 2531–2536. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.214.
101. Wang Y., Lian Z., Chang H. The correlation between the overall thermal comfort, the overall thermal sensation and the local thermal comfort in non-uniform environments with local cooling // *Indoor and Built Environment*. 2022. № 7 (31). C. 1822–1833. DOI: 10.1177/1420326X221079819.
102. Yang B. [и др.]. Assessment of Thermal Comfort and Air Quality of Room Conditions by Impinging Jet Ventilation Integrated with Ductless Personalized Ventilation // *Sustainability*. 2022. № 19 (14). C. 12526. DOI: 10.3390/su141912526.
103. Yasuo U., Hiroshi K., Ryushi K. Numerical simulation on the prevention effect of the cold draft along the window in wintertime // *Eighth International IBPSA Conference*, 11.08.2003, Eindhoven, Netherlands. 2003. C. 1451-1458. DOI: 10.26868/25222708.2007.1451-1458.
104. Zhang S. [и др.]. A simulation framework for predicting occupant thermal sensation in perimeter zones of buildings considering direct solar radiation and ankle draft // *Building and Environment*. 2020. (183). C. 107096. DOI: 10.1016/j.buildenv.2020.107096.
105. Zhang Y., Huang L., Zhou Y. Analysis of Indoor Thermal Comfort of Test Model Building Installing Double-Glazed Window with Curtains Based on CFD // *Procedia Engineering*. 2015. (121). C. 1990–1997. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.09.197.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А.1. ЧЕРТЕЖИ ОКОННЫХ БЛОКОВ, ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ПРИ  
ИСПЫТАНИЯХ**

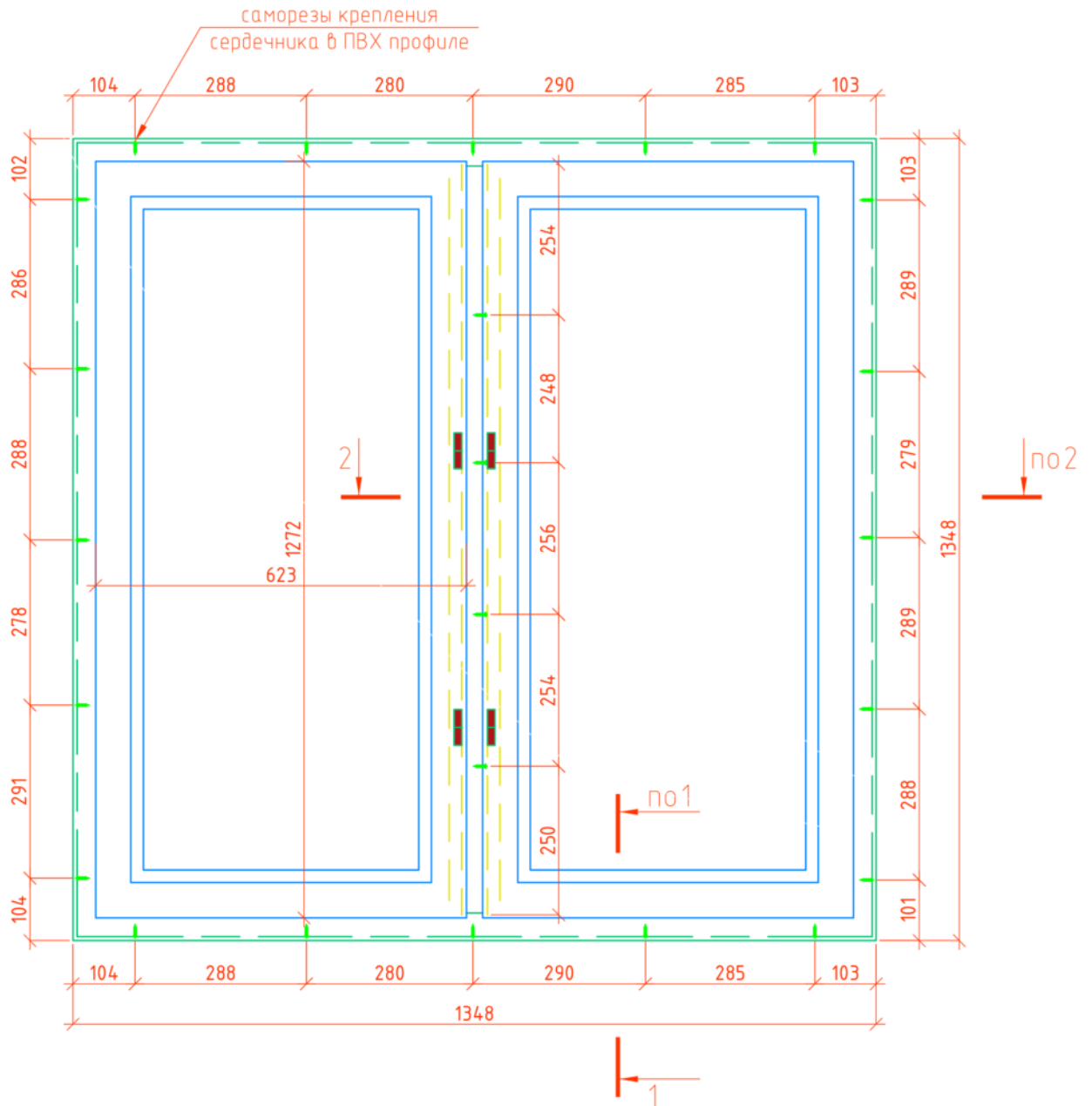


Рисунок А.1.1 – Общий вид оконного блока SL70-14

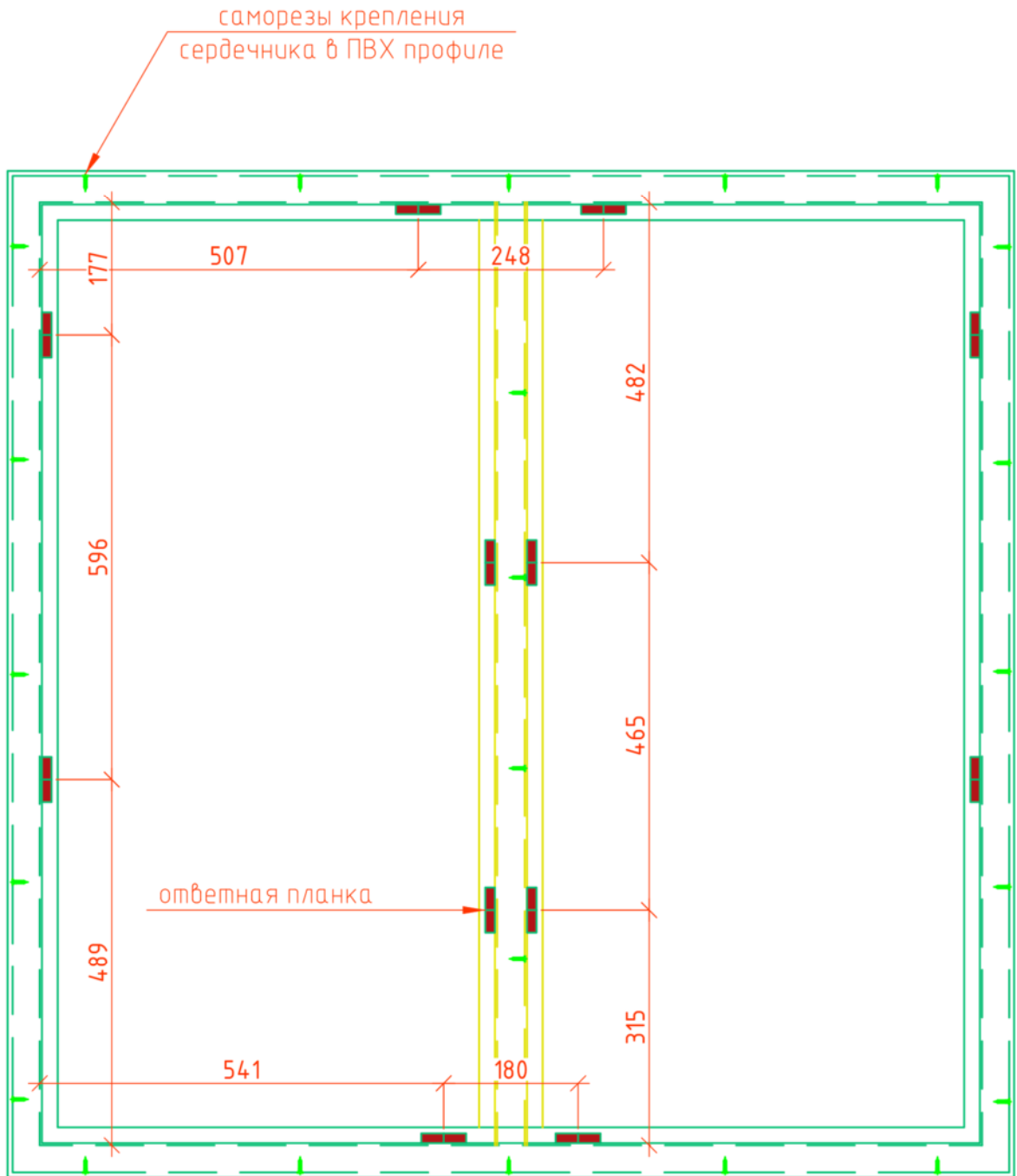


Рисунок А.1.2 – Положение ответных планок в оконном блоке SL70-14



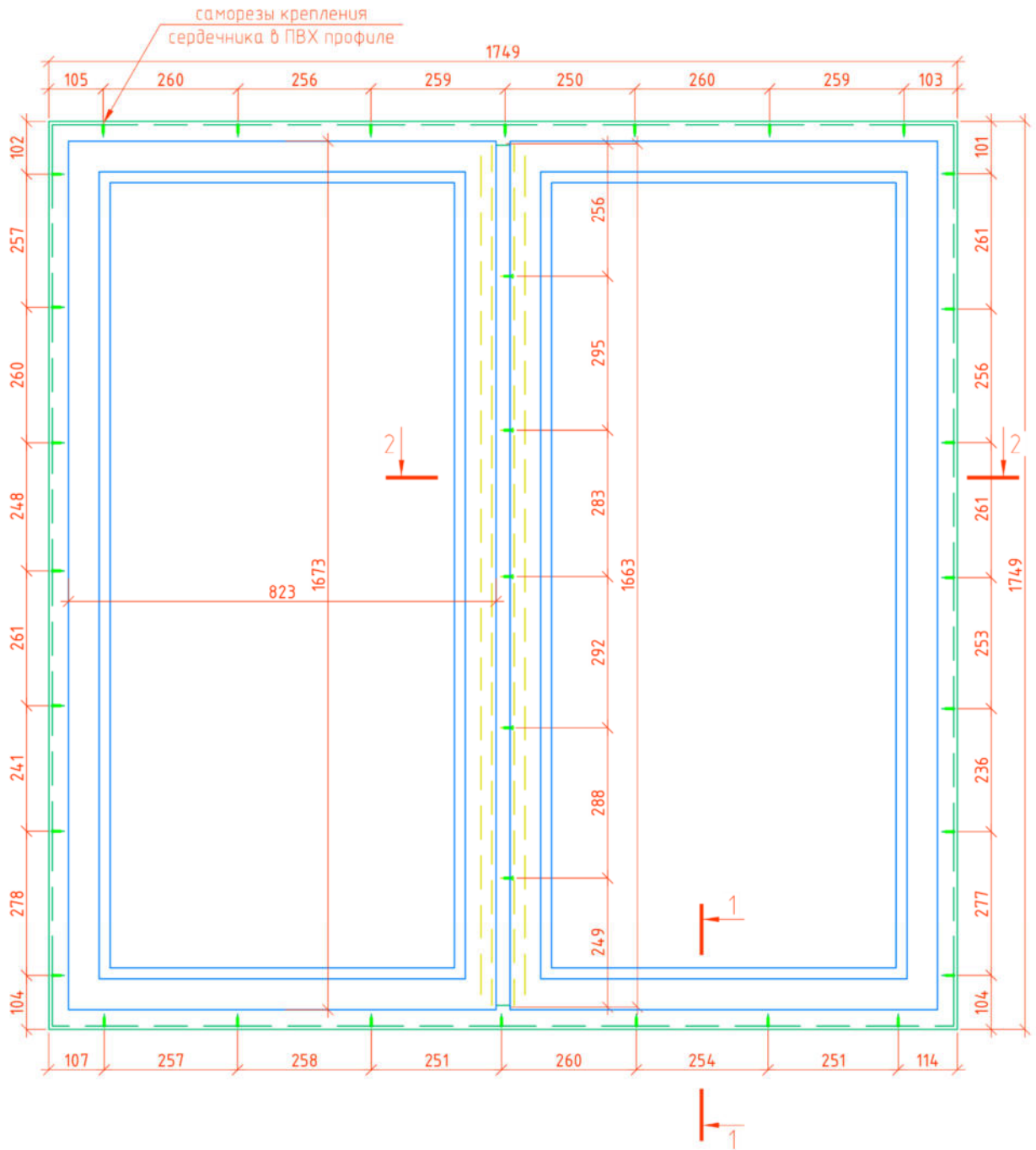


Рисунок А.1.3 – Общий вид оконного блока SL70-18

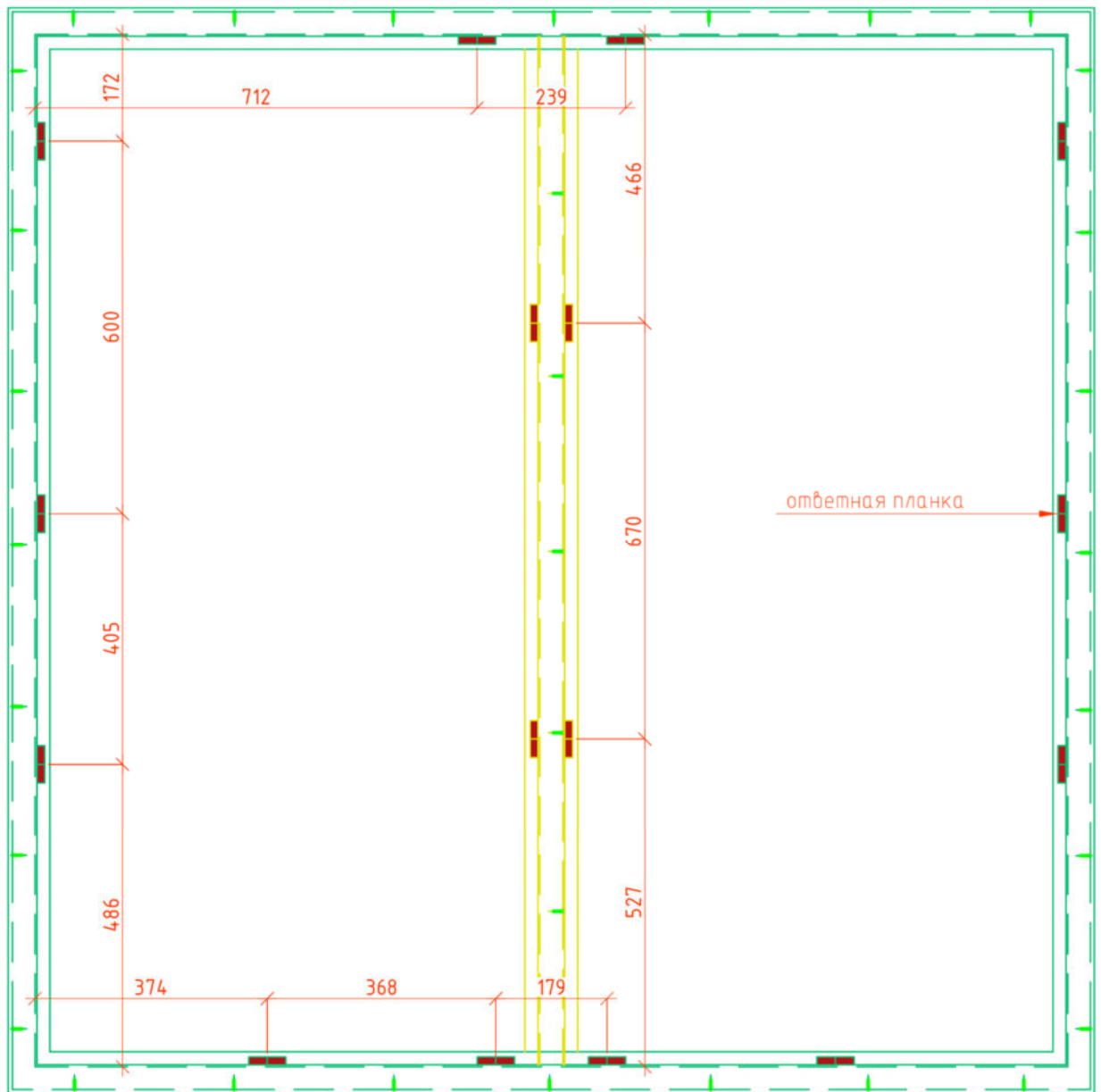


Рисунок А.1.4 – Положение ответных планок в оконном блоке SL70-18

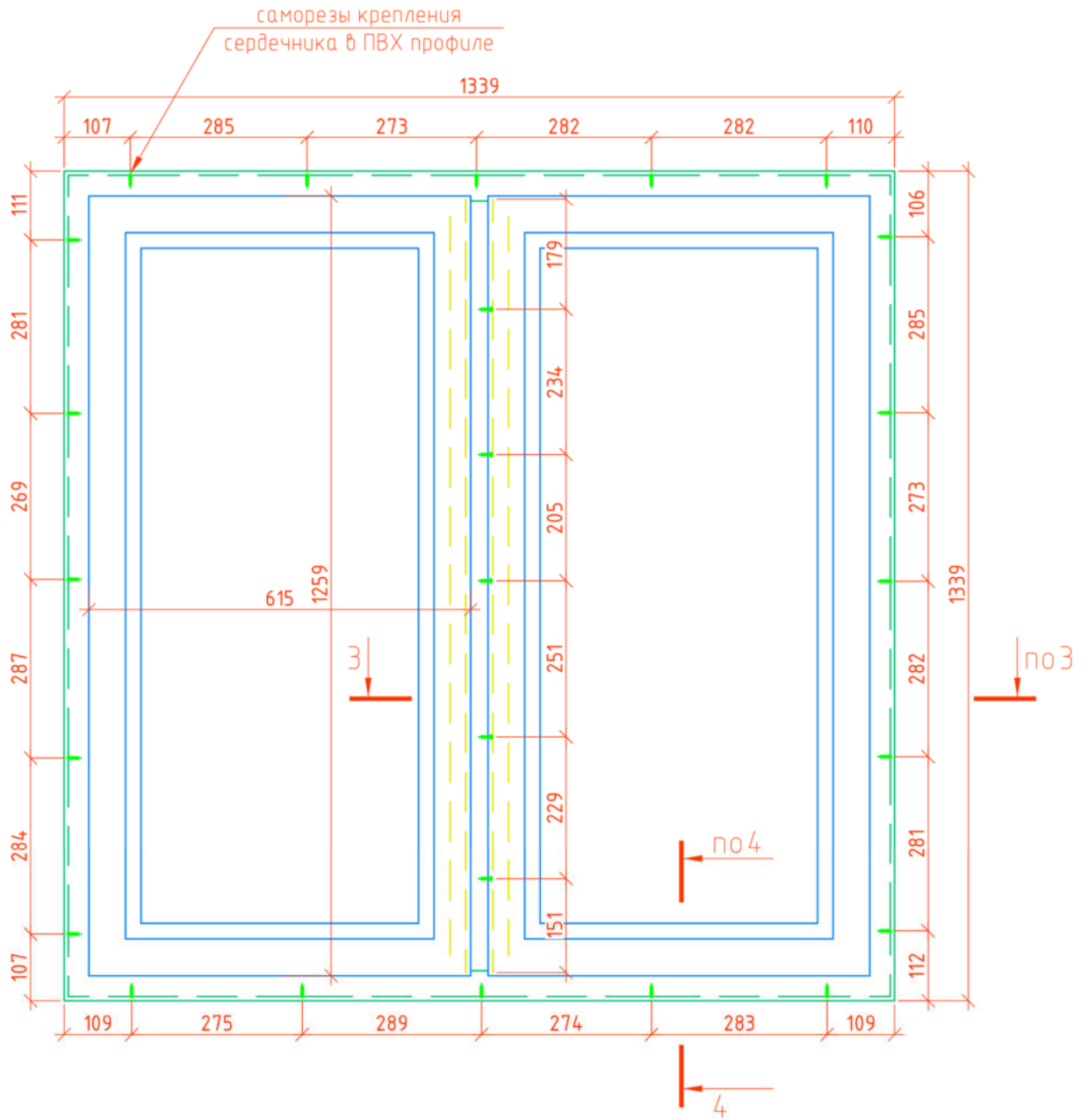


Рисунок А.1.5 – Общий вид оконного блока SL82-14

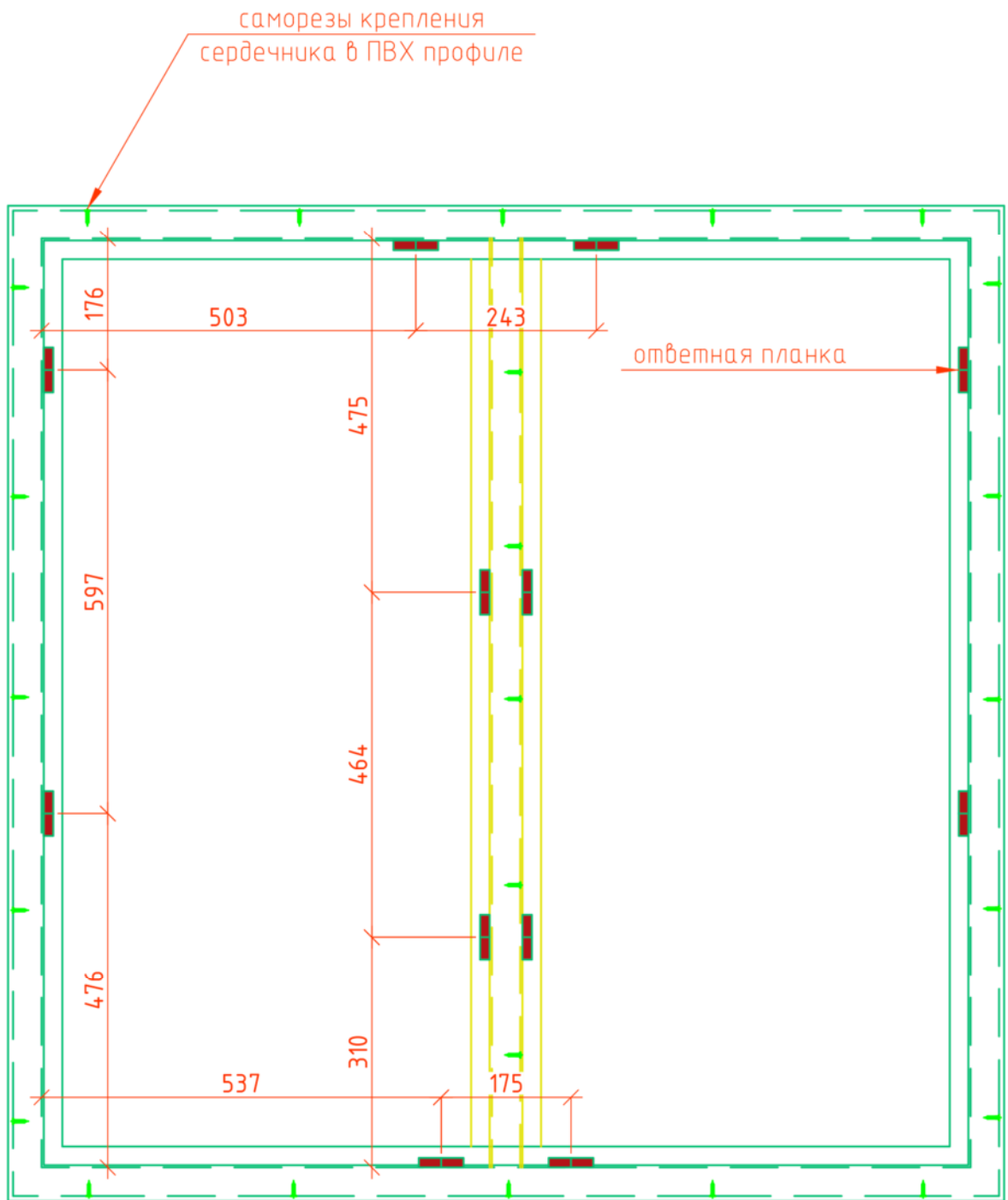


Рисунок А.1.6 – Положение ответных планок в оконном блоке SL82-14

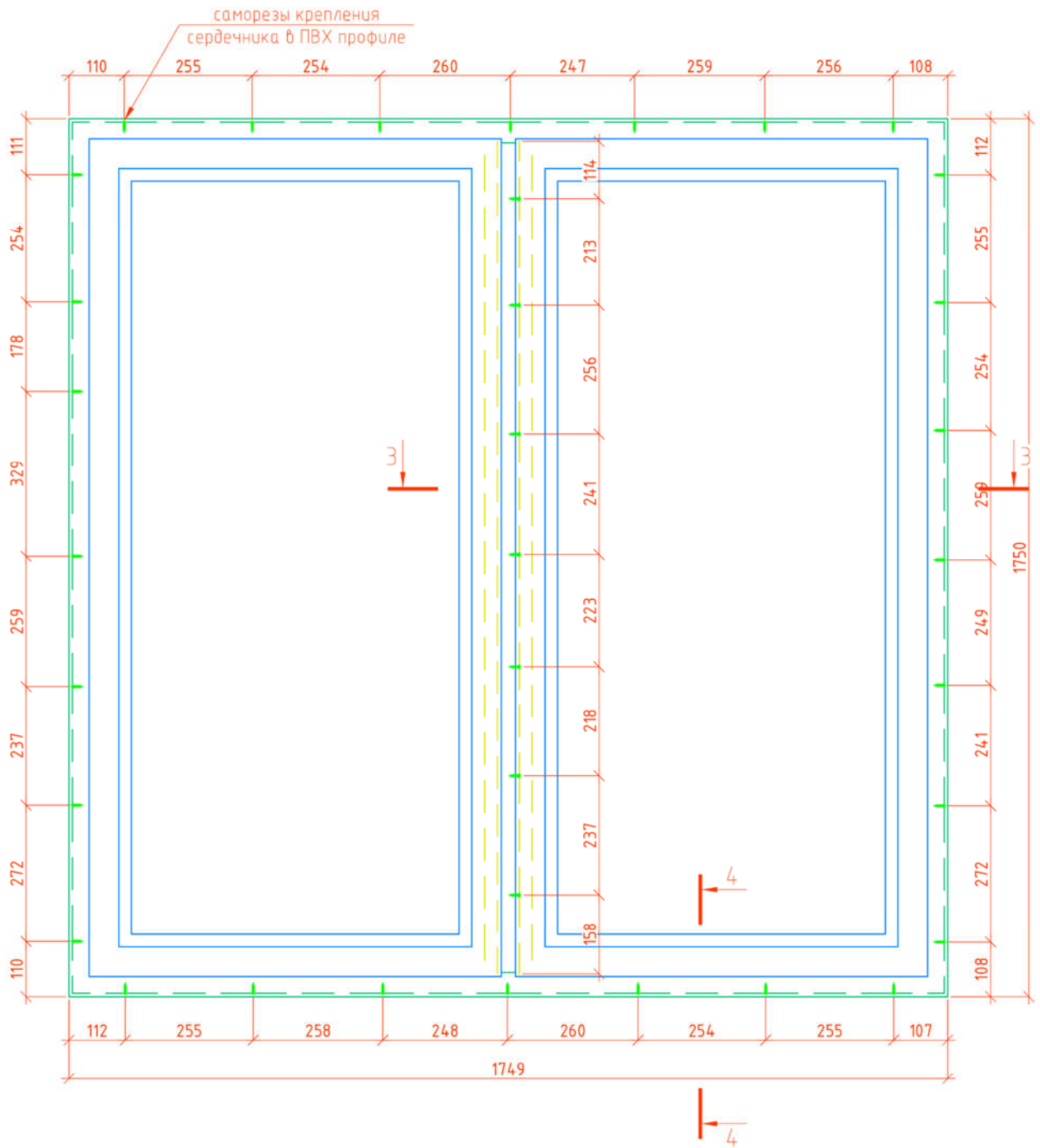


Рисунок А.1.7 – Общий вид оконного блока SL82-18

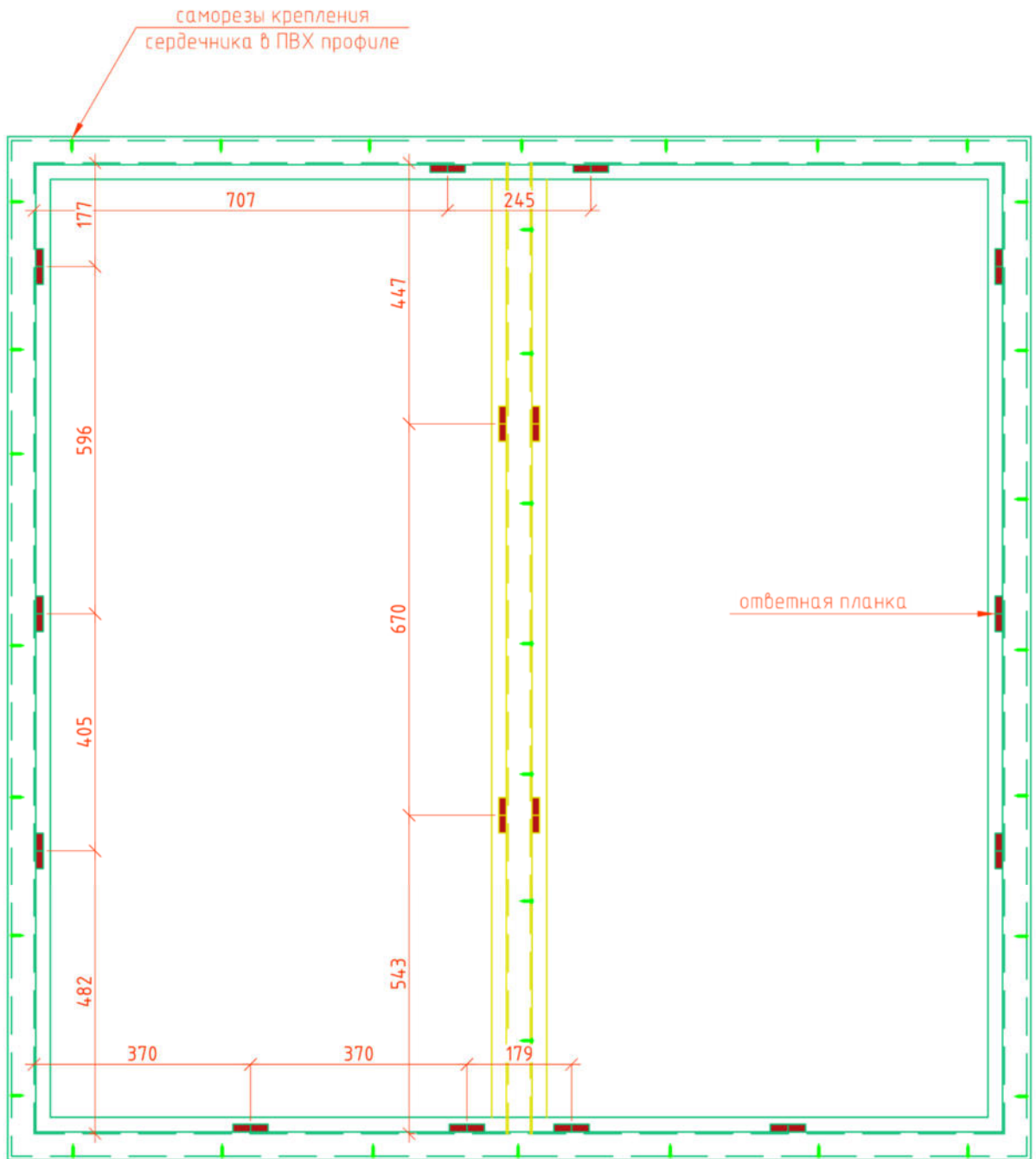


Рисунок А.1.8 – Положение ответных планок в оконном блоке SL82-18

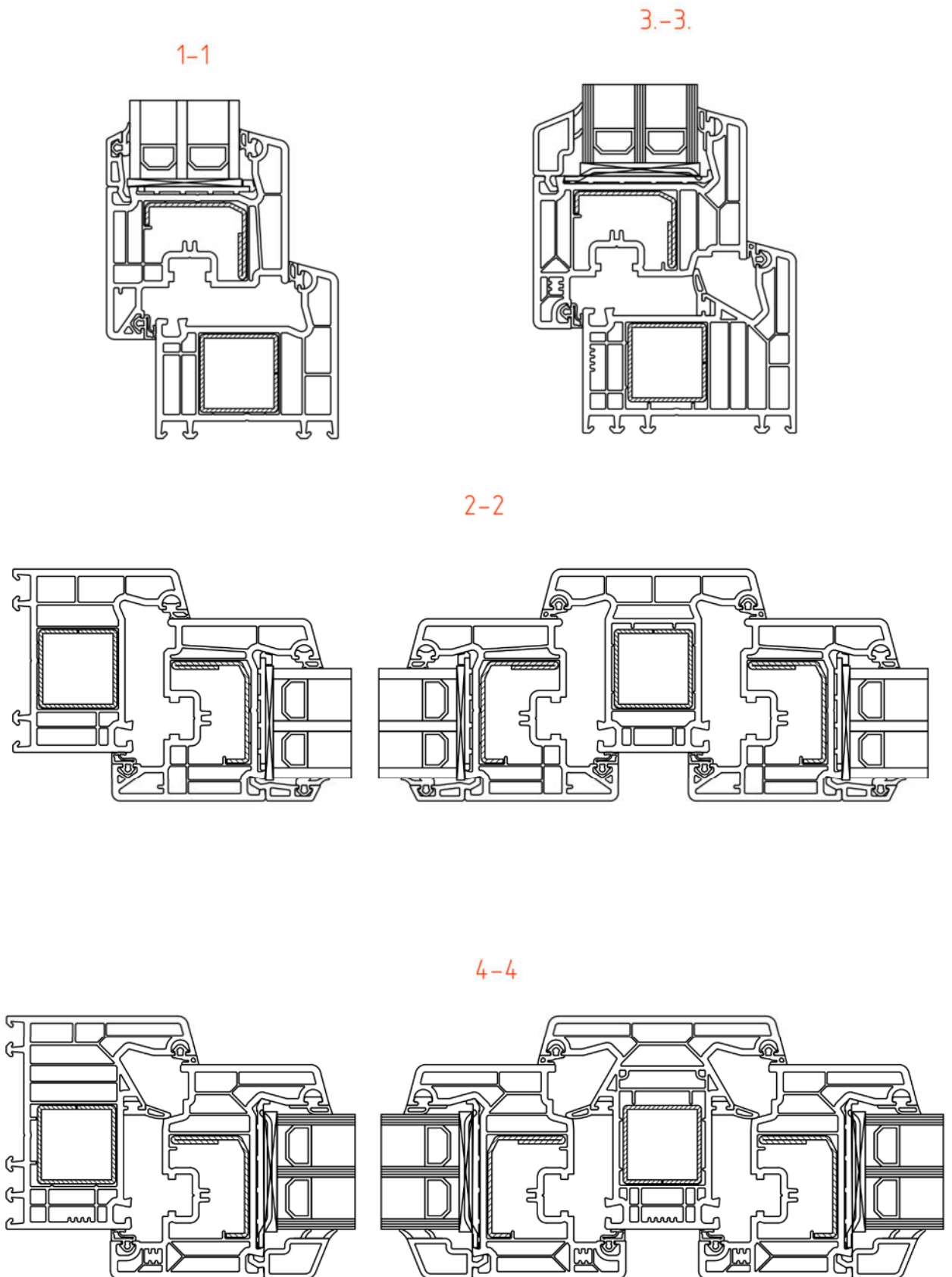


Рисунок А.1.9 – поперечные сечения образцов

## ПРИЛОЖЕНИЕ А.2. СХЕМЫ МОНТАЖА ОКОННЫХ БЛОКОВ

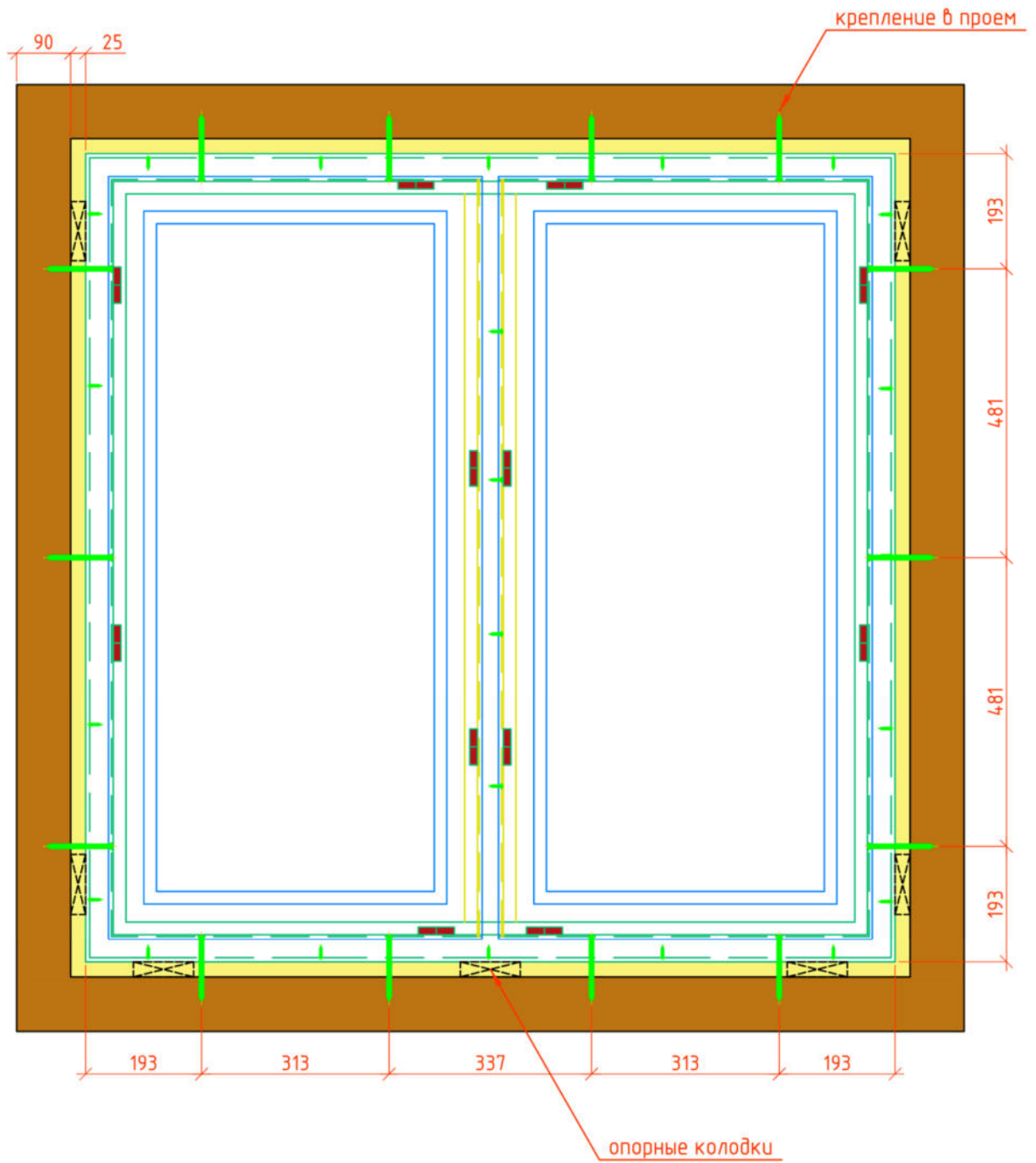


Рисунок А.2.1 – Оконный блок SL70-14, смонтированный в деревянную раму



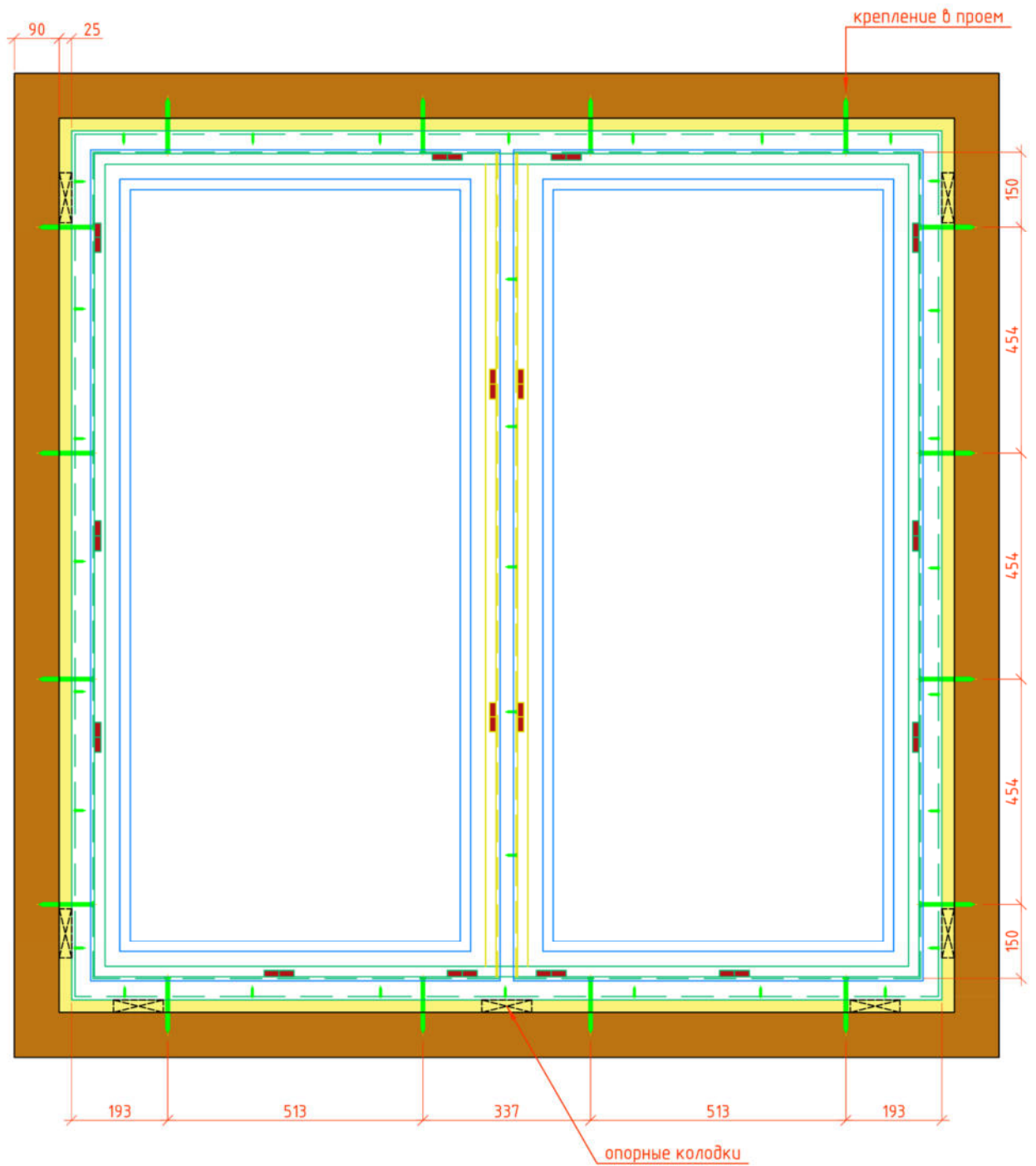


Рисунок А.2.2 – Оконный блок SL70-18, смонтированный в деревянную раму

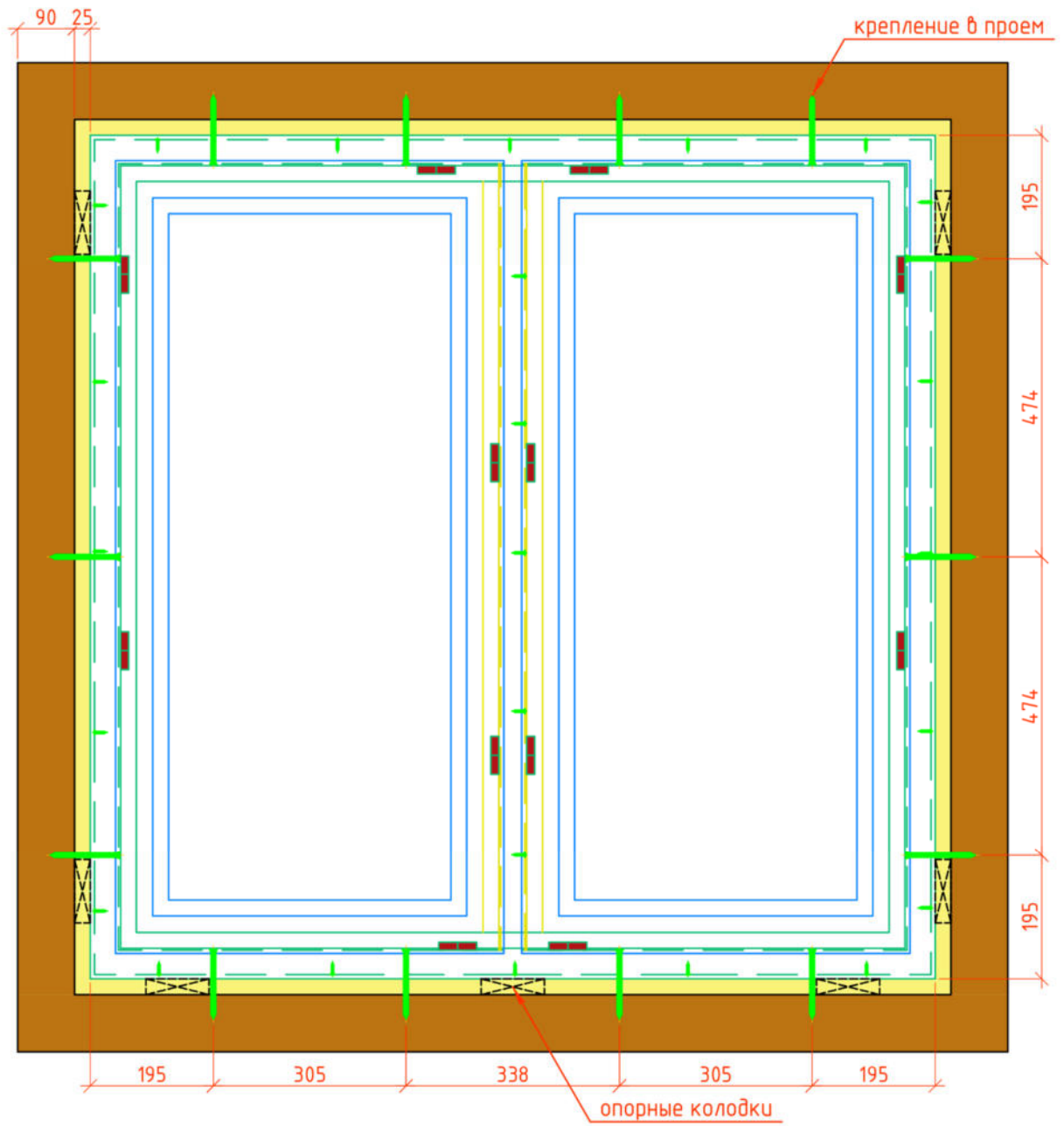


Рисунок А.2.3 – Оконный блок SL82-14, смонтированный в деревянную раму

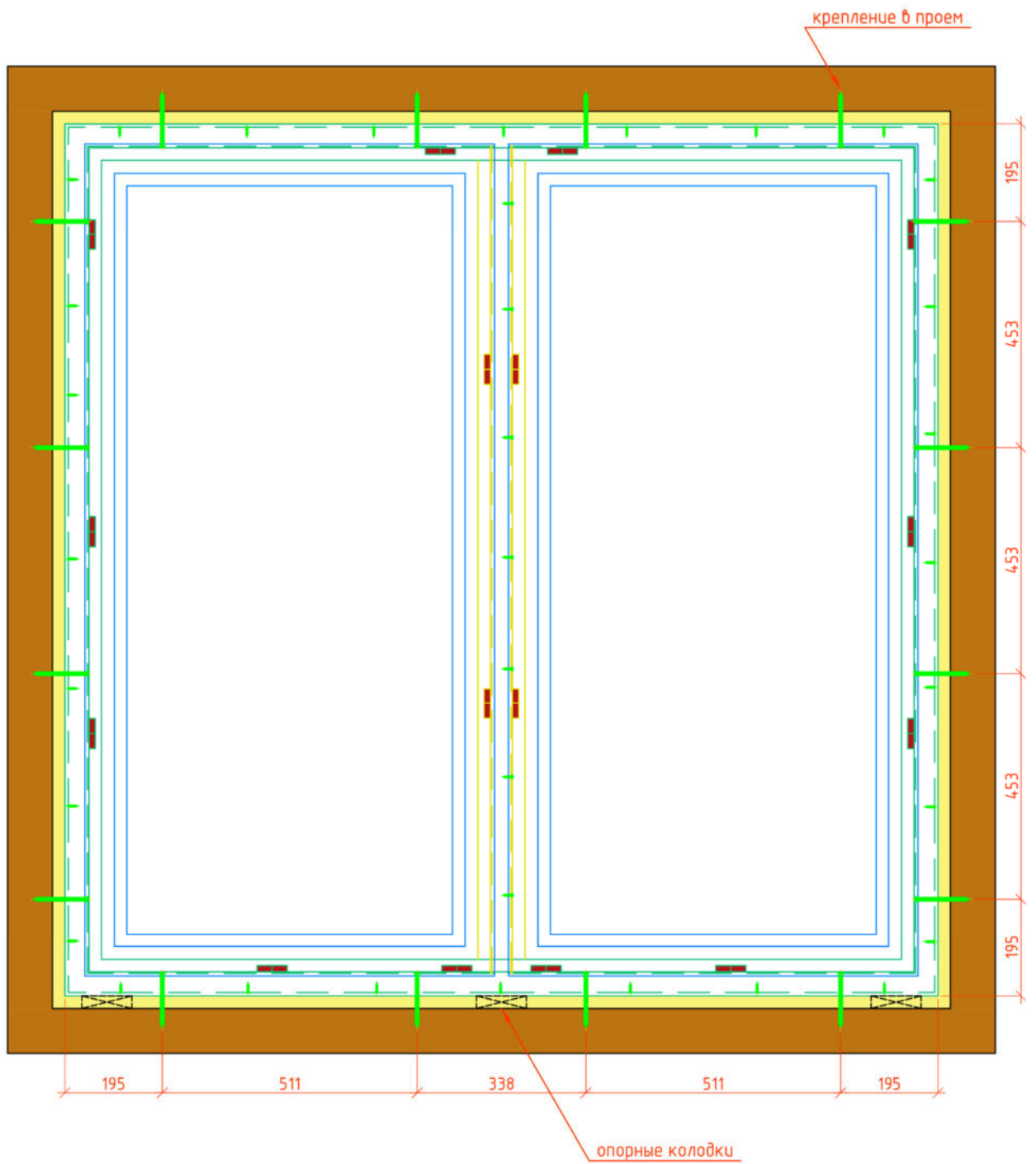
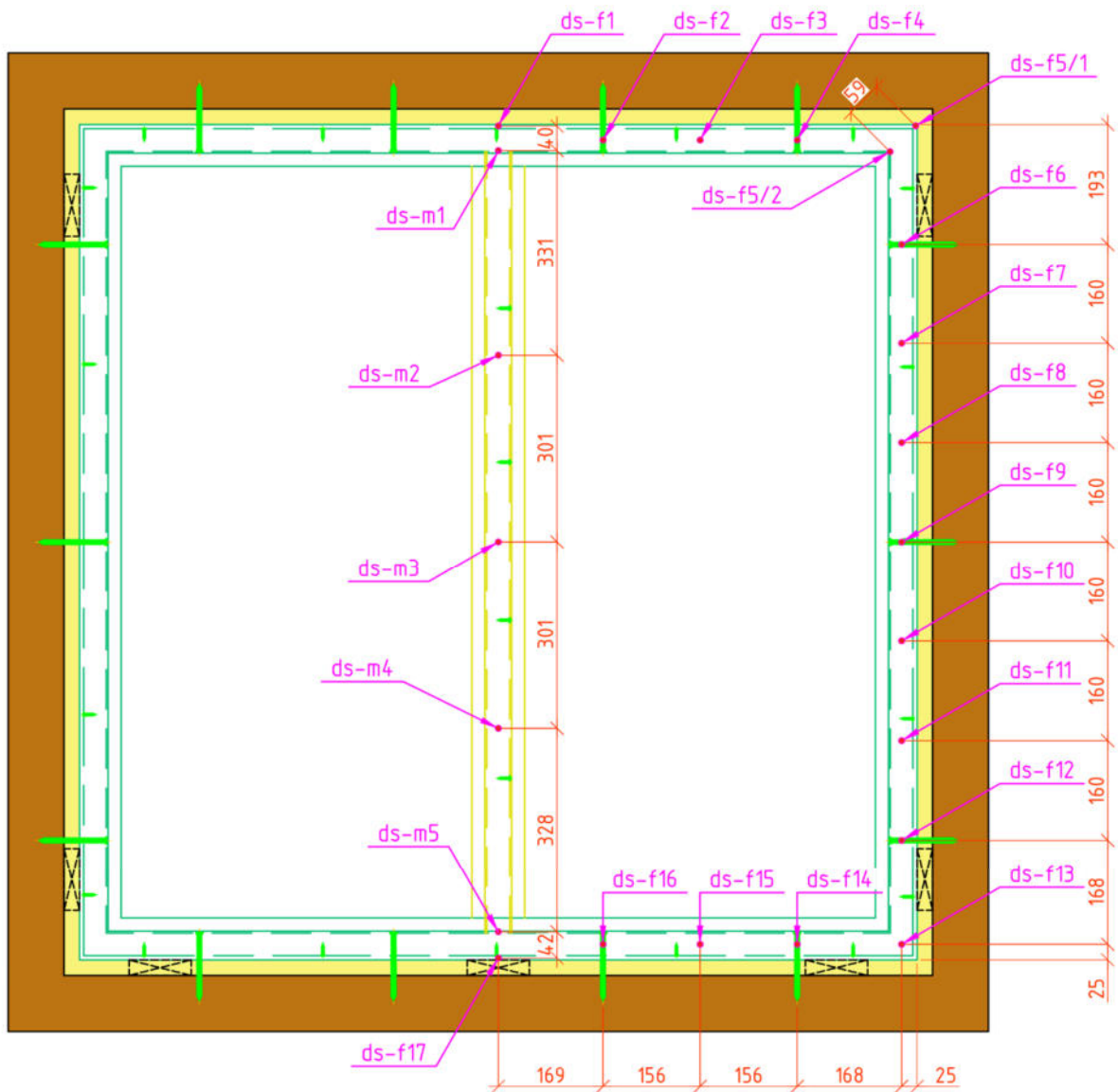


Рисунок А.2.4 – Оконный блок SL82-18, смонтированный в деревянную раму

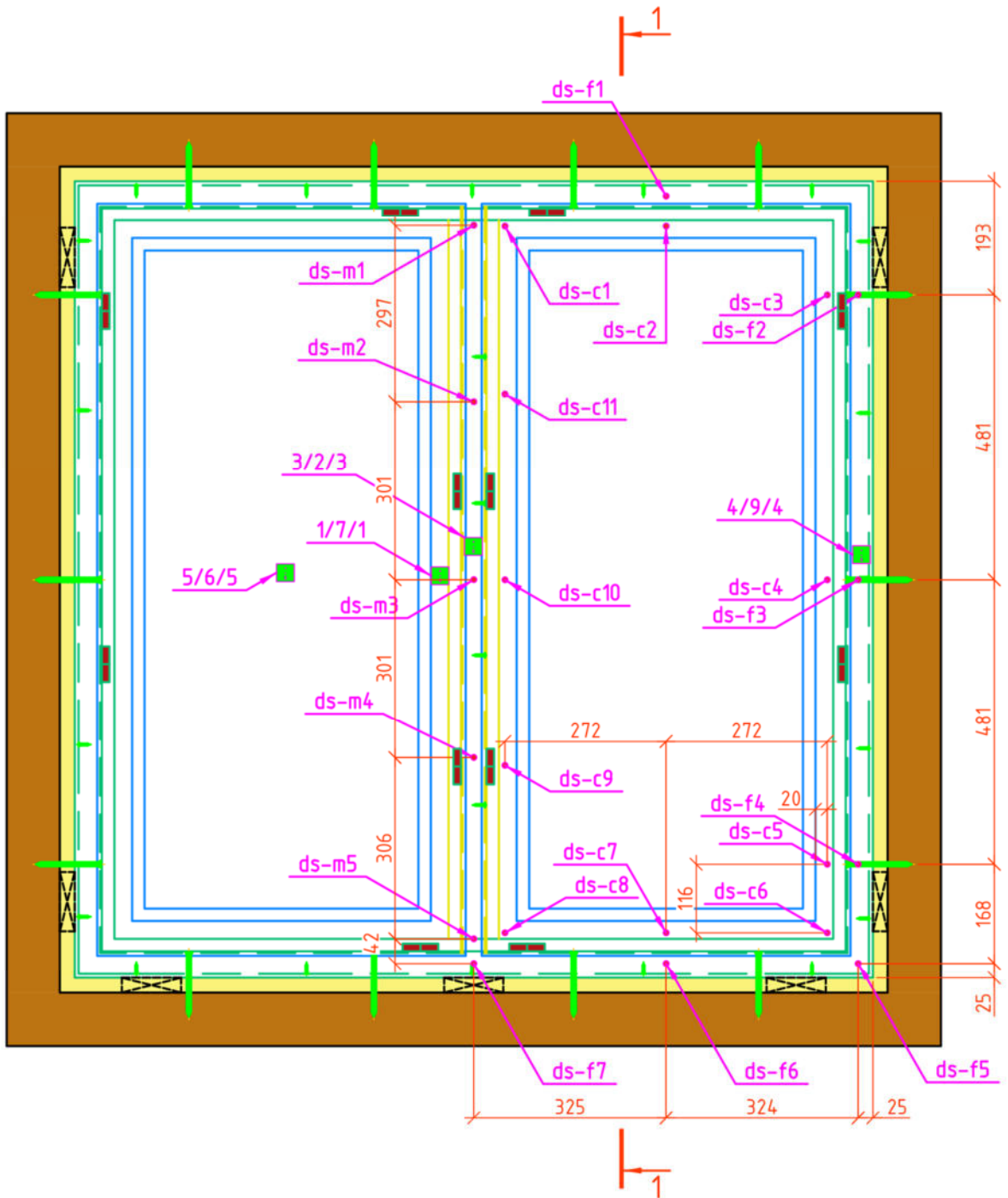
### ПРИЛОЖЕНИЕ А.3. СХЕМЫ РАССТАНОВКИ ДАТЧИКОВ



Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окне направления
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) – датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый – установленный с теплой стороны, голубой – с холодной)
- ◆◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

Рисунок А.3.1 – Расстановка датчиков для образца SL70-14P (без створок)



Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окну направлении
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) – датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый – установленный с теплой стороны, голубой – с холодной)
- ◆◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

Рисунок А.3.2 – Расстановка датчиков для образца SL70-14С (со створками)

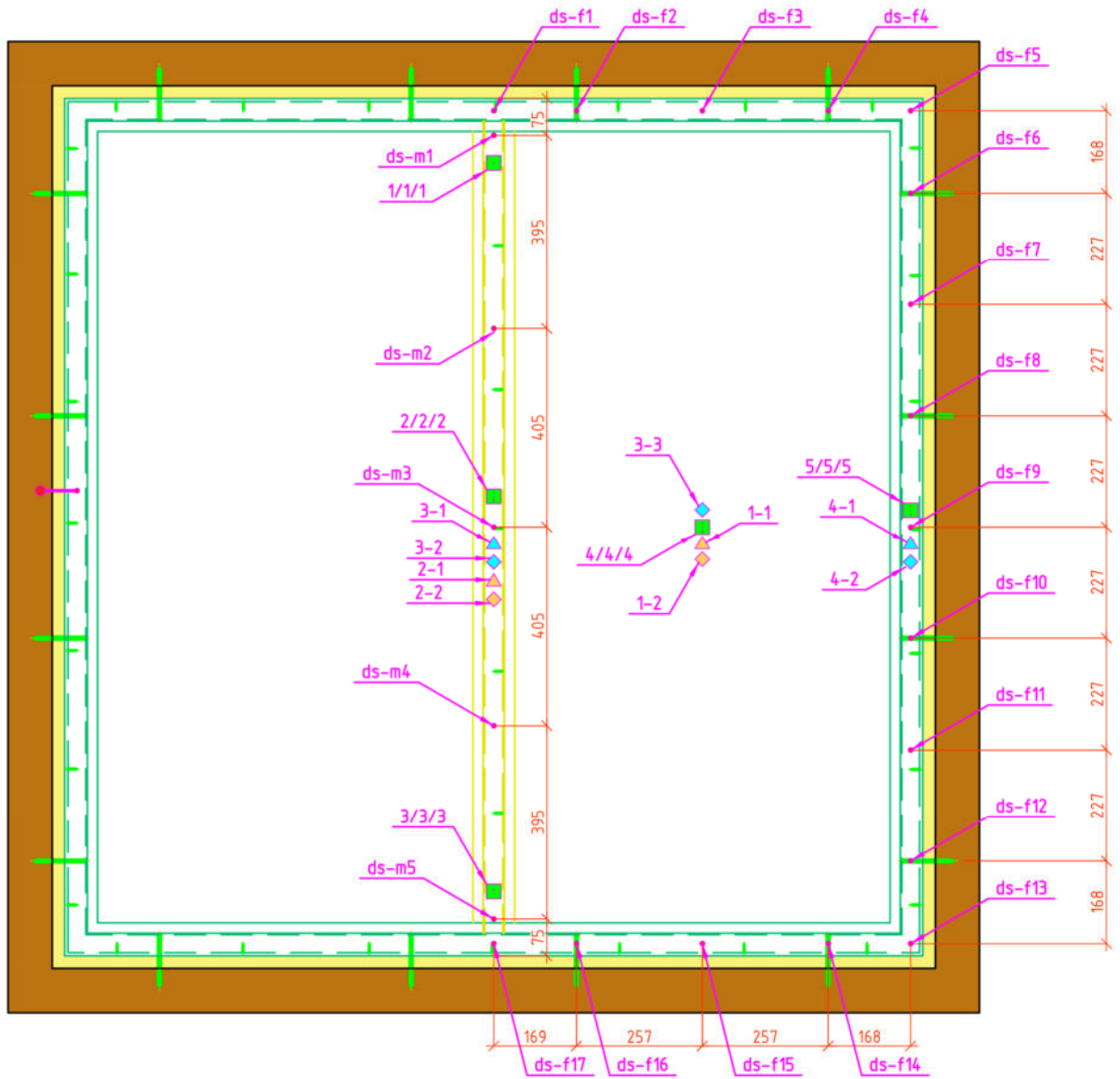
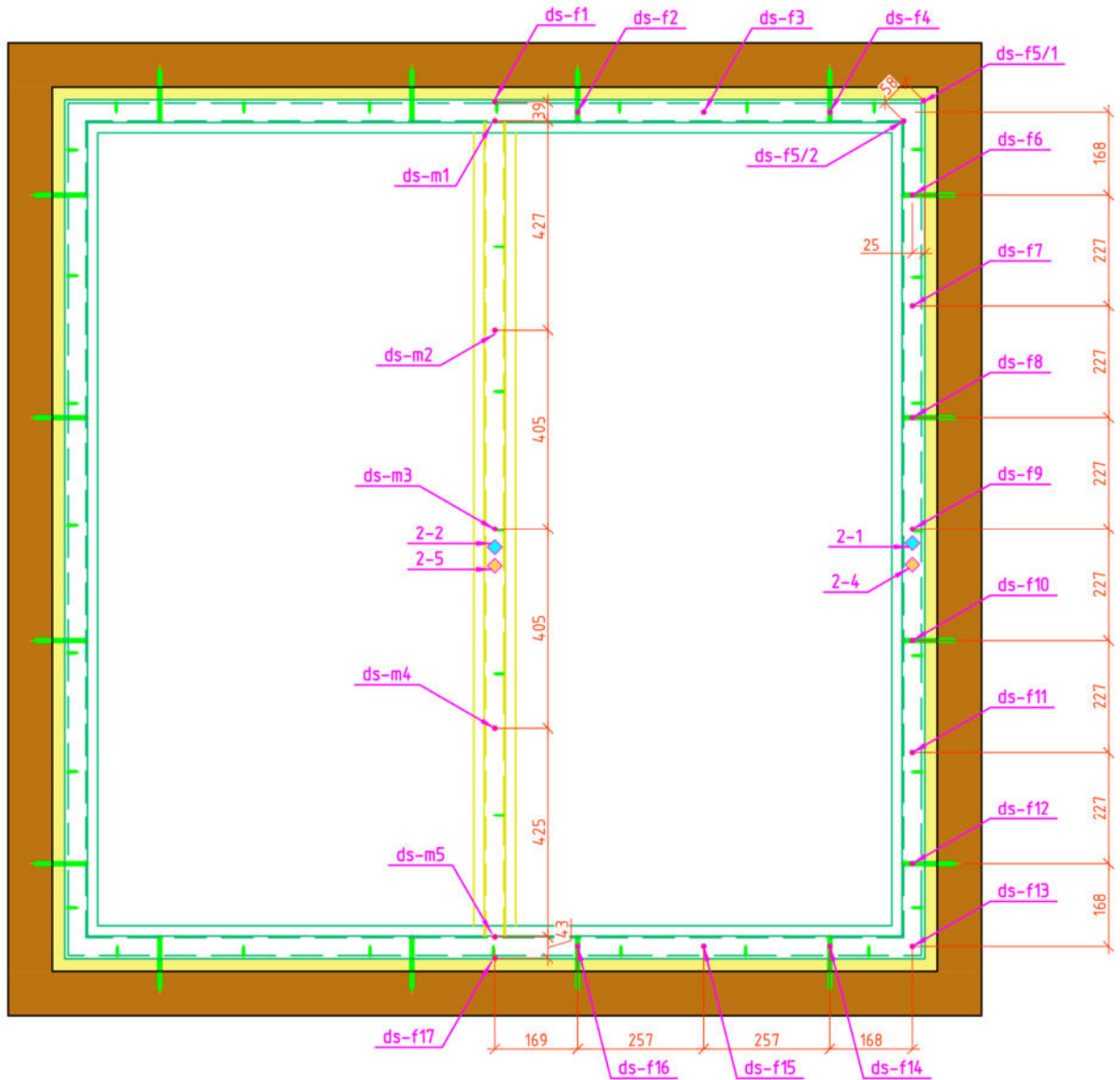


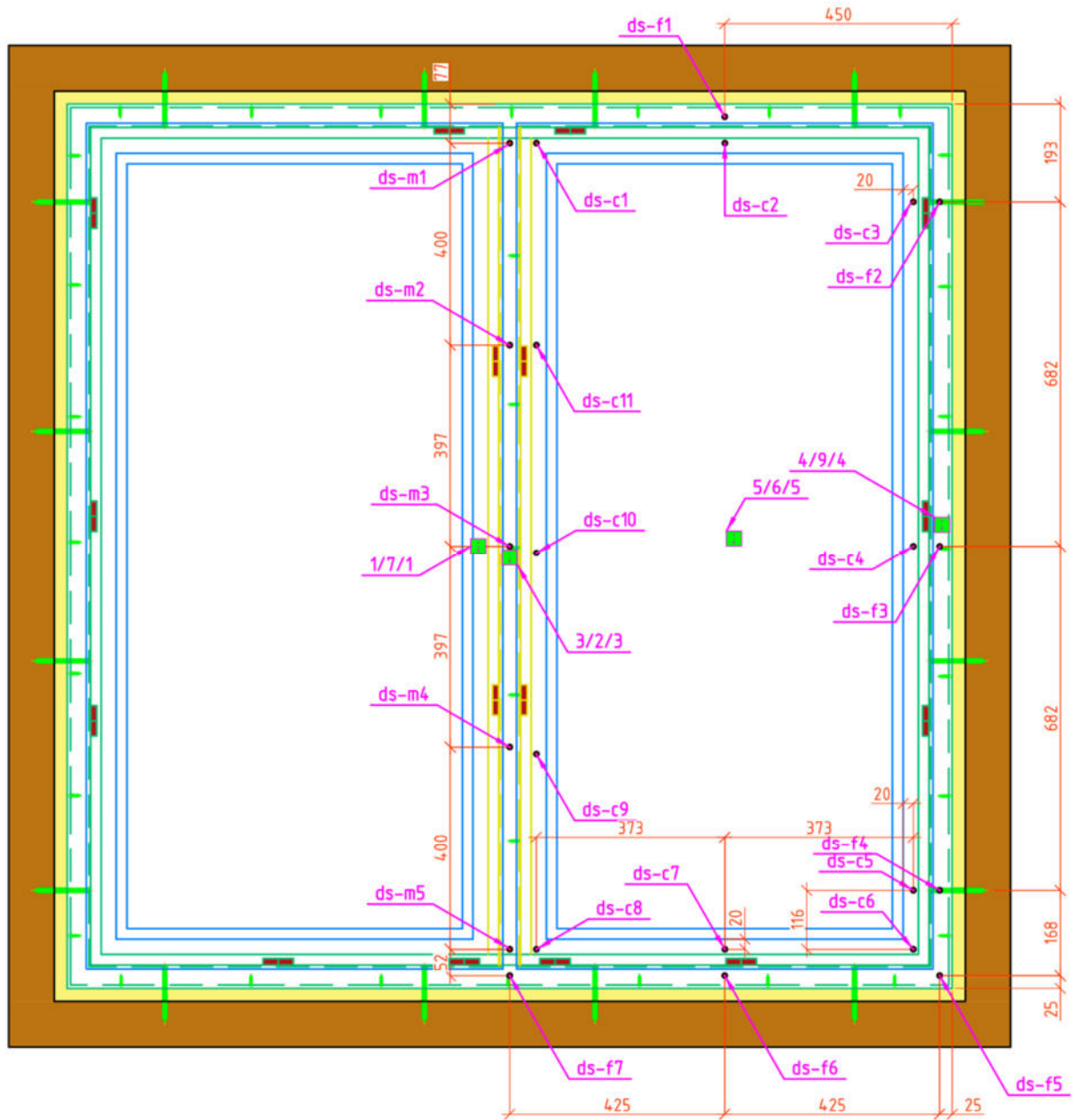
Рисунок А.3.3 – Расстановка датчиков для образца SL70-18P (без створок) (1 вариант)



Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окне направления
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) - датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲ ▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый - установленный с теплой стороны, голубой - с холодной)
- ◆ ◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

Рисунок А.3.4 – Расстановка датчиков для образца SL70-18P (без створок) (2 вариант)

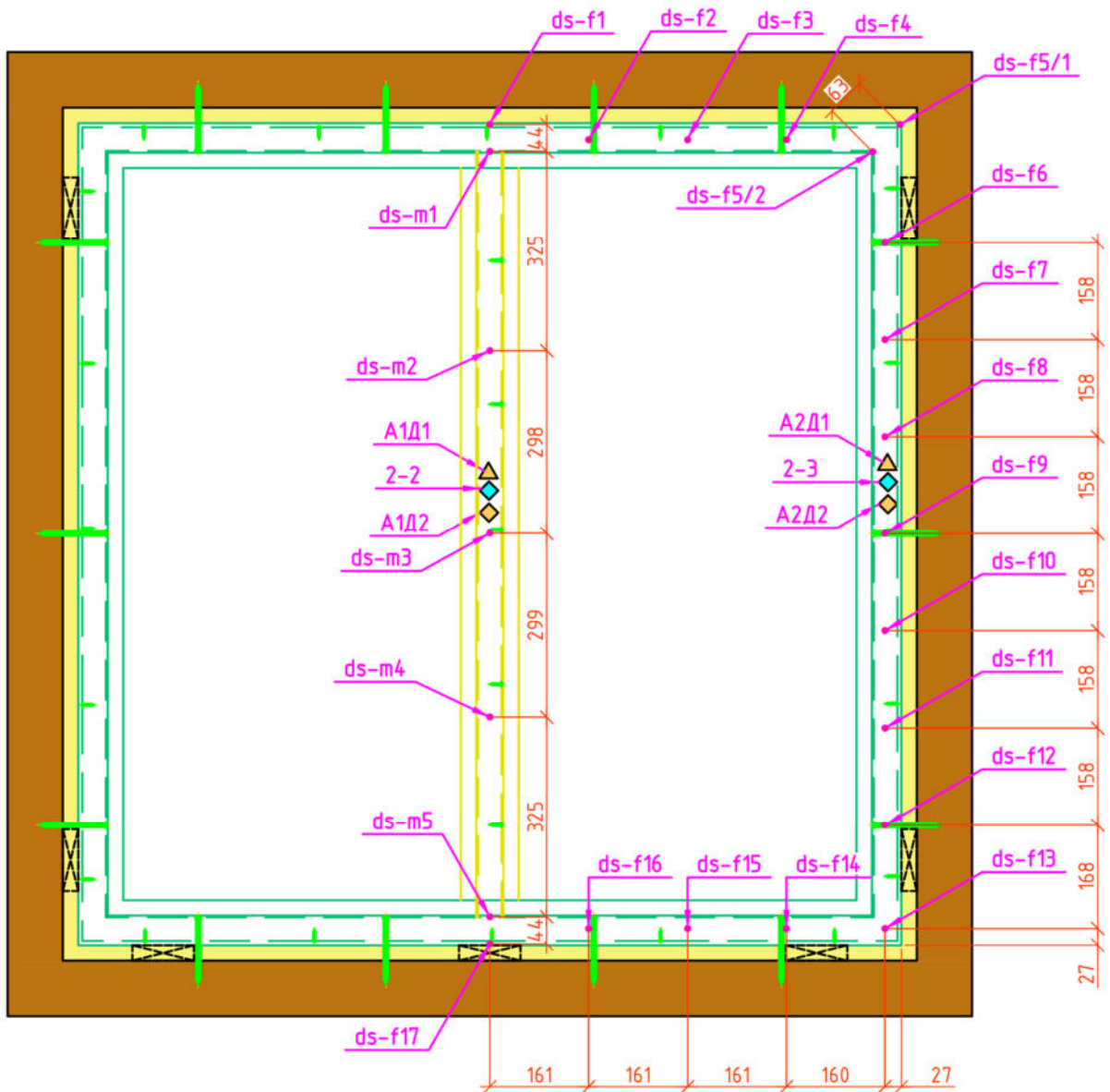


Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окну направлении
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) - датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲ ▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый - установленный с теплой стороны, голубой - с холодной)
- ◆ ◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

Рисунок А.3.5 – Расстановка датчиков для образца SL70-18С (со створками)





Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окне направления
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) - датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲ ▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый - установленный с теплой стороны, голубой - с холодной)
- ◆ ◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

Рисунок А.3.6 – Расстановка датчиков для образца SL82-14P (без створок)

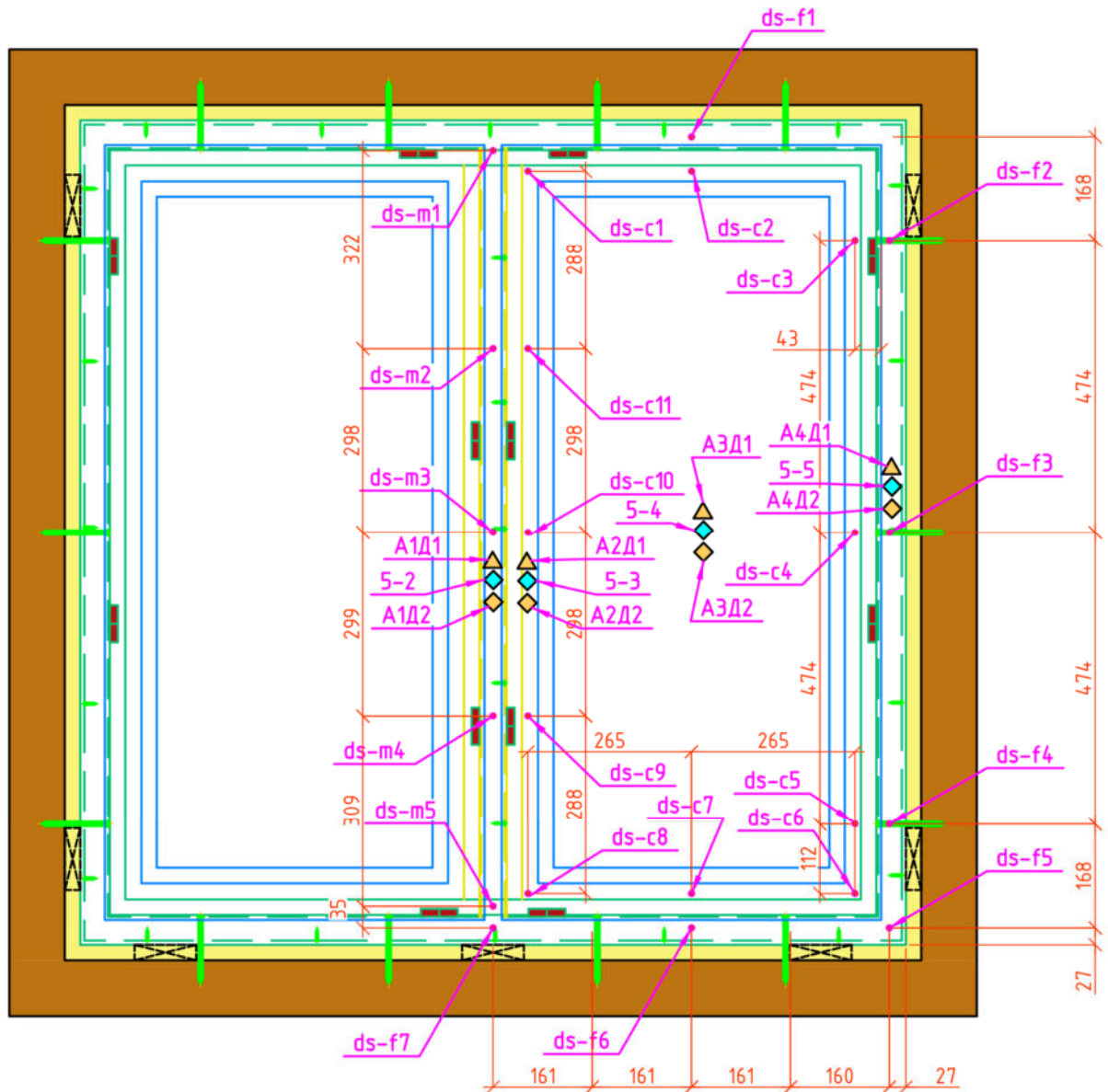
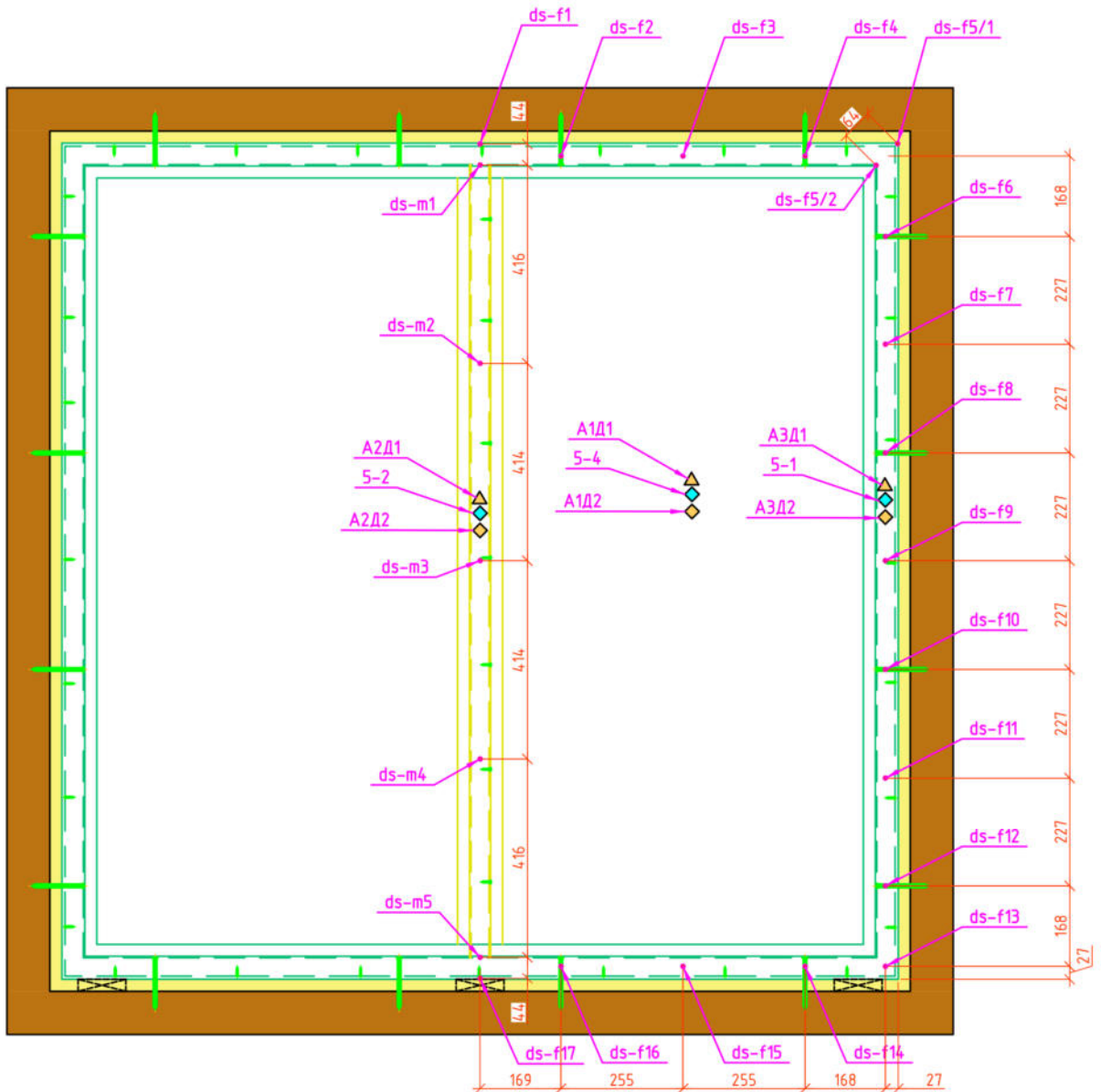


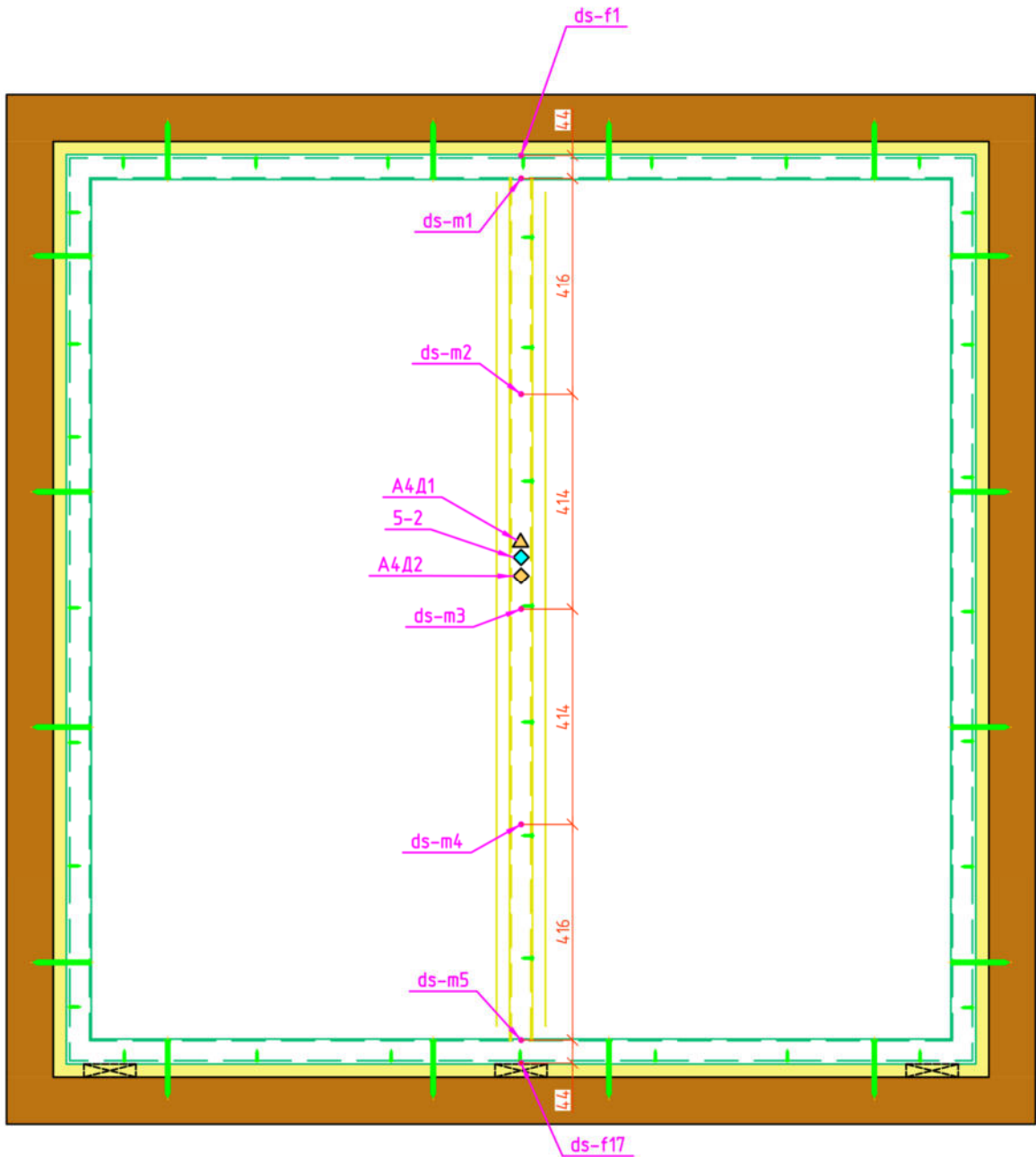
Рисунок А.3.7 – Расстановка датчиков для образца SL82-14С (со створками)



Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окне направлении
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) - датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲ ▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый - установленный с теплой стороны, голубой - с холодной)
- ◆ ◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

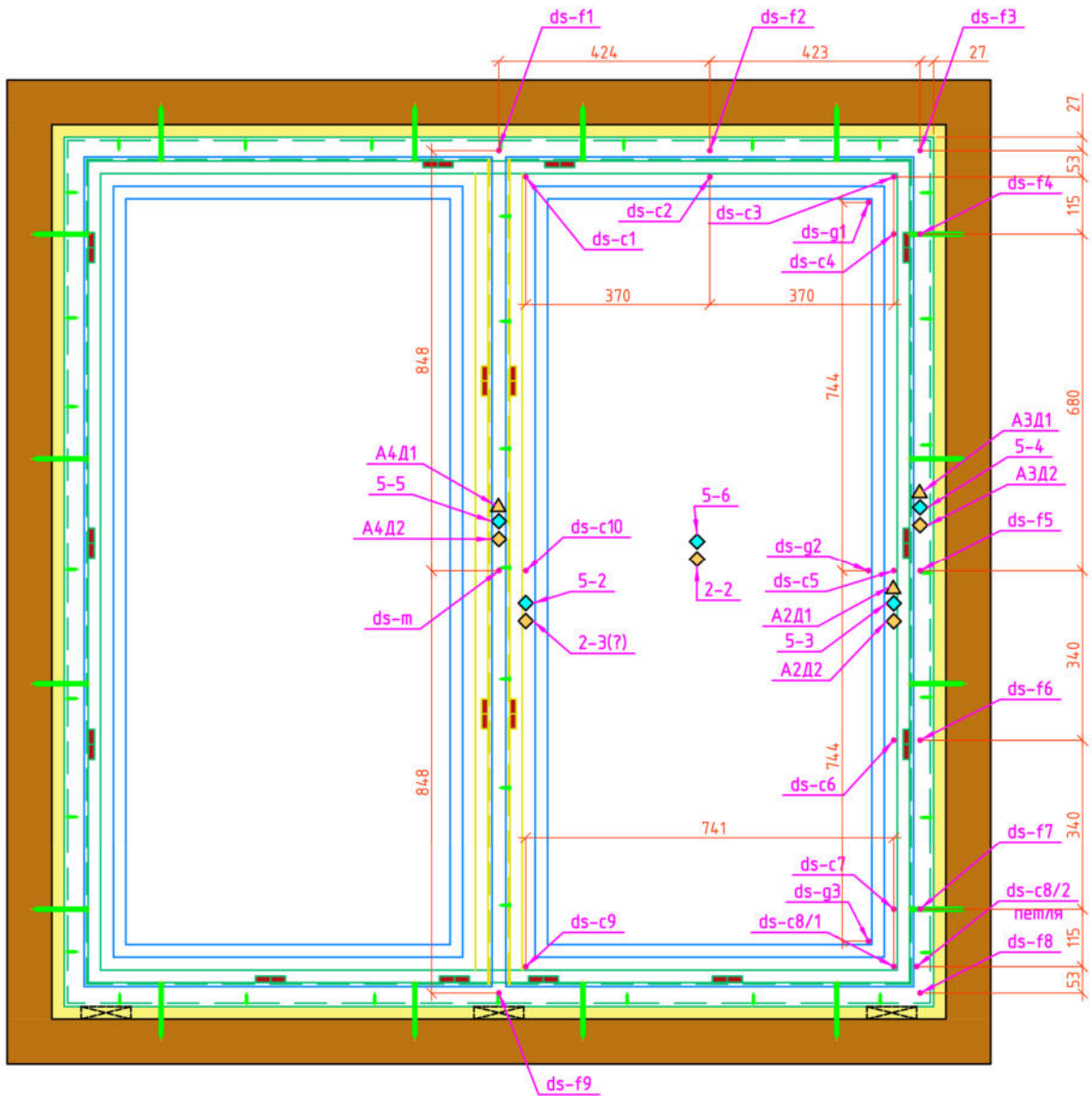
Рисунок А.3.8 – Расстановка датчиков для образца SL82-18P (без створок)



Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окне направлении
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) - датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲ ▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый - установленный с теплой стороны, голубой - с холодной)
- ◆ ◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

Рисунок А.3.9 – Расстановка датчиков для образца SL82-18P (без створок)1



Условные обозначения:

- - датчик перемещения в перпендикулярном окне направления
- - группа датчиков ПОТОК (указано, какие датчики включены в группу) - датчки потока установлены с теплой стороны
- ▲ ▲ - датчик потока ТЕРЕМ (желтый - установленный с теплой стороны, голубой - с холодной)
- ◆ ◆ - датчик температуры ТЕРЕМ

Рисунок А.3.10 – Расстановка датчиков для образца SL82-18

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ ВНЕДРЕНИЯ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ****ОКОННЫЕ СИСТЕМЫ****СИСТЕМЫ ПЛАСТИН****ООО «ВЕКА Рус»**

Российская Федерация, 108807  
г. Москва, поселение Первомайское,  
д. Губцево, ул. Дорожная, д. 10

Тел: (495) 777 53 77

e-mail: info@veka.ru  
https://www.veka.ru

**СПРАВКА**

**о внедрении научных и практических результатов диссертационной работы**

**Аксёнова Ивана Сергеевича на тему**

**«Напряженно-деформированное состояние светопрозрачных ограждающих конструкций из ПВХ профилей при климатических температурных воздействиях»**

Результаты диссертационной работы на тему «Напряженно-деформированное состояние светопрозрачных ограждающих конструкций из ПВХ профилей при климатических температурных воздействиях», представленной на соискание учёной степени кандидата наук, использованы ООО «ВЕКА Рус» при выполнении поисковой научно-исследовательской работы по теме «Влияние температурных и ветровых нагрузок и воздействий на деформации и технико-эксплуатационные характеристики оконных блоков ПВХ. Этап 2. Экспериментальные и теоретические исследования напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей при действии температурных и ветровых нагрузок», проведенной в рамках договора № Р.380-22 от 29.03.2022 г. между ООО «Века Рус» и НИУ МГСУ.

Полученные результаты исследований, в т.ч. математическая модель напряженно-деформированного состояния оконных конструкций из ПВХ профилей с армирующим стальным вкладышем, а также разработанной на её основе методики расчета прогибов профильных элементов оконных конструкций из ПВХ профилей при действии климатических температурных нагрузок, внедрены в текущую практическую деятельность технического отдела ООО «Века Рус» и позволяют проводить уточненный подбор характеристик поперечного сечения армирующих стальных вкладышей (с учетом механической работы ПВХ профиля, фактических условий крепления силовых элементов в узлах оконной конструкции) по второй группе предельных состояний, что гарантирует сохранение оконной конструкцией своих эксплуатационных качеств при силовых и климатических температурных воздействиях.

Руководитель Технического отдела  
ООО «ВЕКА Рус»



Оксюлов А.Ю.